

# Bilan de recherches effectuées.

Jusqu'à présent, mes recherches se sont principalement situées à l'interface entre les probabilités et la combinatoire. Ma liste de publications, ci-dessous, utilise la numérotation de 1 à 7, et les numéros, dans les paragraphes suivants, se réfèrent à cette liste.

- La combinatoire, ainsi que les probabilités discrètes, ont ceci en commun, qu'elles cherchent à mieux comprendre le comportement typique de structures discrètes, comme certaines familles de mots ou de chemins, d'arbres, de cartes combinatoires; elles cherchent également à comprendre le comportement asymptotique de ces objets : par exemple, on choisit uniformément un objet de taille  $n$ , et on fait tendre  $n$  vers l'infini, et on cherche à exprimer le fait que, correctement normalisés, pour une topologie bien choisie, nos objets convergent en loi vers une limite aléatoire (continue, le plus souvent). Une partie de mes travaux s'inscrit dans ce cadre :
  - 2 . Il s'agit de l'étude du comportement en temps long, d'un modèle de compétition entre plusieurs espèces animales (utilisent notamment des réseaux d'interactions),
  - 3 . Modèle de cartes décorées; il s'agit d'un modèle de physique statistique : nous établissons une étude combinatoire (comptage, bijections,...)
  - 6 . Convergence des quadrangulations à bord simple vers le disque Brownien. Nous démontrons, que les quadrangulations uniformes à  $n$  faces, possédant une face spéciale, distinguée, à bord simple de longueur  $\gamma_n$  converge vers le disque Brownien, pour  $\gamma_n$  bien choisi (de l'ordre de  $\sqrt{n}$ ).

- La combinatoire et l'algèbre sont liés de nombreuses manières. Une preuve en est, que l'on trouve dans de nombreuses équipes de combinatoire, des spécialistes de combinatoire algébrique (JC Aval, au LaBRI, par exemple). En fait, l'intrication de ces disciplines, provient du fait, que les décompositions des structures (suffisamment simples) de la combinatoire, peuvent se comprendre, et se coder, à l'aide de structures algébriques, similaires, en quelques sortes. En théorie des probabilités, l'algèbre est également un outil central pour comprendre certains objets fondamentaux : par exemple, les chaînes de Markov (qui sont étudiées à l'aide d'outils d'algèbre linéaire). Une partie de mes travaux est motivée par la recherche de la compréhension de l'algèbre sous-jacente, de certains modèles probabilistes. Des liens avec la combinatoire sont également explicites.

- 1 . Étude de système de particules indexés par un réseau. Nous caractérisons l'ensemble des modèles de systèmes de particules possédant une loi invariante de type Gibbs (il s'agit, en quelque sorte, de la combinatorisation des équations algébriques, résolues par les lois de Markov).
- 7 . Étude des chaînes de Markov sur  $N$  ayant une matrice de transitions quasi-triangulaire. Nous établissons des critères de récurrence, transience, et calculons les lois invariantes (lorsqu'il y en a). Ces travaux utilisent des outils combinatoires (notamment, le matrix tree theorem).

- Les relations combinatoire-probabilités se trouvent bien sûr au centre de la problématique de la génération aléatoire de structures discrètes. Ces algorithmes de génération sont utiles pour la visualisation, la compréhension, et la fabrication de statistiques de grands objets aléatoires, et sont utilisés, également, pour tester des algorithmes travaillant sur ces structures. En général, la mise au point de ces algorithmes est non triviale, et leur preuve de succès (le fait qu'ils renvoient un objet avec la bonne distribution), nécessite des outils de combinatoire, et de probabilités discrètes.

- 4 . Nous trouvons une preuve combinatoire à l'algorithme d'Aldous et Broder, qui permet de simuler un arbre couvrant uniforme d'un graphe connexe quelconque  $G$ .

- 5 . Il s'agit d'un survey, consacré aux modèles de sous-arbres aléatoires (non nécessairement couvrant), d'un graphe connexe quelconque  $G$ . Dans ce travail, on donne également, des procédés permettant de simuler uniformément un sous arbre de taille fixé, de  $G$ . En dehors de résultats mathématiques, nous avons programmé nos algorithmes, et donnons des statistiques et des conjectures.

Je décris maintenant un peu plus avant ces résultats.

# 1. Invariant measures of discrete interacting particle systems : algebraic aspects.

With J.F. Marckert, 2017, 55 pages.

*ESAIM: Probability and Statistics*

Dans cet article nous nous intéressons à une classe particulière de systèmes de particules (SP) : il s'agit de chaînes de Markov en temps continu  $(\eta_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  à valeurs dans un ensemble de coloriage d'un graphe  $G = (V, E)$  où l'ensemble de couleurs  $E_\kappa$  à  $\kappa < \infty$  éléments (ainsi, une configuration, est un élément de  $E_\kappa^V$ ). La dynamique du processus est déterminée par une matrice de taux de sauts  $T = [T[u|v]]_{u,v \in E_\kappa^L}$  de portée  $L$ . Moralement  $T[u|v]$  exprime la tendance d'un sous-coloriage  $u$  de  $\eta$  de longueur  $L$  de changer vers  $v$ .

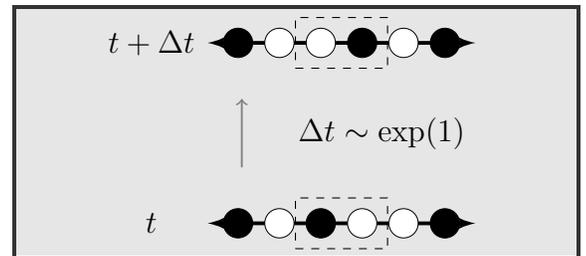
**Exemple (TASEP sur la ligne  $\mathbb{Z}$ )** Soit  $G = (\mathbb{Z}, E)$  avec  $E = \{\{x, x + 1\}, x \in \mathbb{Z}\}$ . Il s'agit d'un modèle à 2 couleurs 0 et 1 : 1=Noir représente la présence d'une particule sur un site, et 0=blanc, l'absence de particule.

Au temps 0, une configuration est choisie (aléatoirement, éventuellement).

La dynamique du modèle est définie comme suit : chaque paire de sites  $\bullet - \circ$  choisit un temps aléatoire  $\tau$  exponentiel de taux 1 (indépendamment des autres). Au temps  $\tau$ , la particule de gauche de la paire, se déplace sur le site droit. Les autres paires restent inchangées. Bien sûr, chaque saut, modifie la configuration, et de nouvelles horloges sont attribuées aux paires  $\bullet - \circ$  nouvellement créés.

La matrice de taux de sauts, codant l'ensemble des paramètres de ce modèle, est

$$T[w|w'] = \begin{cases} 1 & \text{si } w = \bullet - \circ, w' = \circ - \bullet \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Une mesure est dite invariante par  $T$  si lorsque le SP suivant  $T$  est initialisé avec  $\eta_0 \sim \mu$ , alors  $\eta_t \sim \mu$ , c'est-à-dire, la loi de la configuration est constante en fonction du temps. Notre but : trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour un modèle de SP, pour que celui-ci possède une mesure invariante "simple" (les détails de la notion de simplicité, dépendent du graphe  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  or  $\mathbb{Z}^d$  : Markov, Gibbs ou mesure produit). Les questions naturelles concernent, à SP donné, les conditions pour la bonne définition [17], l'existence, l'unicité, l'ergodicité et vitesse de convergence vers la loi stationnaire [17, 21, 16, 6], entre autres ; ici, à la place de fixer un PS on travaille à l'inverse : donnée  $\mu$  quels sont les PS qui l'ont comme mesure invariante ?

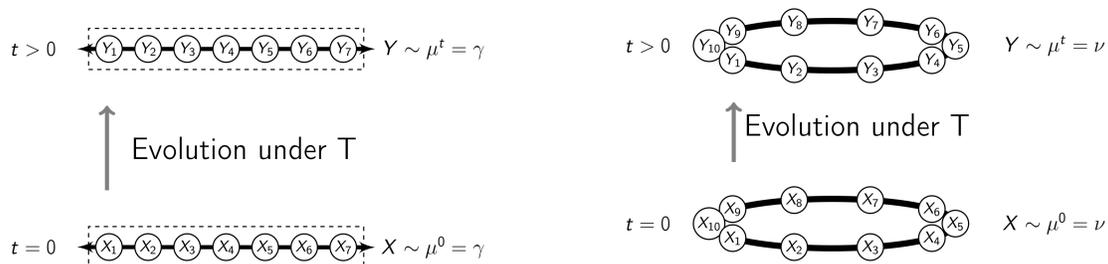


FIGURE 1 – Représentation des dynamiques sur  $\mathbb{Z}$  et sur le cycle de longueur 10.

On dit que le couple  $(\mu, T)$  est invariant sur le graphe  $G$  si  $\mu$  est invariant par  $T$  sur  $G$ . Le résultat principal de cet article est la preuve de l'équivalence suivante : Le couple  $(Markov(M), T)$  est invariant sur  $\mathbb{Z}$  ssi le couple  $(Gibbs(M), T)$  est invariant sur le cycle de longueur  $f(L)$  ; où  $Markov(M)$  et  $Gibbs(M)$  dénotent respectivement de mesures de Markov et de Gibbs dépendant d'un noyau  $M$  et où  $f$  est une fonction explicite (pour  $L = 2$ ,  $f(L) = 7$  ; autrement dit, l'invariance de  $Markov(M)$  par  $T$  sur la ligne, est équivalente à l'invariance de  $Gibbs(M)$  par  $T$ , sur le cycle de largeur 7 : vérifier un nombre fini d'équations est suffisant pour

cela, alors, qu'un nombre infini d'équations sont nécessaires pour la ligne ).  
Nous présentons aussi différentes applications de nos résultats.

## 2. Coexistence for a population model with forest fires epidemics.

With A. Linker and D. Remenik, 2018, 31 pages.

Accepté dans *Annals of applied probabilities*. [Arxiv: 1811.12468](https://arxiv.org/abs/1811.12468).

Nous étudions la survivance et la coexistence dans un modèle de compétition à deux espèces sur un graphe, sujet à des épidémies de type "forest-fire" (c'est-à-dire, qui a tendance à tuer les composantes connexes de chaque espèce). Notre modèle est une extension du celui introduit par [13] où Durrett et Remenik ont étudié un système de particules en temps discret sur un graphe aléatoire 3-régulier où l'ensemble des sites occupés est croissant en fonction du temps, en dehors d'événement exceptionnel : de temps en temps, une épidémie tue les clusters de grand taille. Dans notre extension nous permettons la coexistence de deux espèces ; celles-ci sont sujettes à des épidémies, indépendantes, qui tuent non seulement les grands clusters, mais aussi ceux de petite taille ; cela induit une compétition des espèces pour l'espace.

Notre résultat principal concerne la caractérisation des paramètres du modèle, pour lesquels on a coexistence des espèces, ou la domination d'une d'entre elles (dans chaque cas, il s'agit de régions explicites d'intérieur non-vide dans l'espace des paramètres). En général dans la littérature, l'espèce la plus adaptée domine ce qui veut dire qu'une petite perturbation sur les paramètres change le comportement entre coexistence et extinction. Notre résultat établi qu'il y a des paramètres qui peuvent être perturbés en gardant la propriété de coexistence.

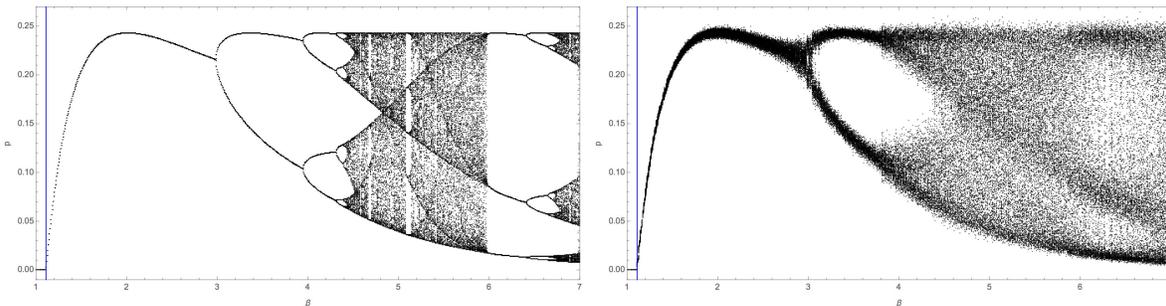


FIGURE 2 – Nous étudions les propriétés de la densité limite de sites occupés par chaque espèce en fonction de la taille du graphe et puis nous montrons que ces propriétés passent à échelle finie. Gauche : orbites de la limite pour différents paramètres, la limite s'avère déterministe et les orbites génèrent une cascade de bifurcation. Droite : orbites du modèle pour une taille de graphe  $N \in \{20000, 40000, 100000\}$  pour différents paramètres.

## 3. Tree decorated maps.

With A. Sepúlveda, 2019, 28 pages.

[Electronic Journal of combinatorics](https://arxiv.org/abs/1905.08111).

Dans ce papier nous introduisons l'ensemble de cartes décorées par un arbre (pas nécessairement couvrant) et nous montrons qu'elles sont en bijection avec le produit Cartésien entre, d'une part, l'ensemble des arbres planaires [14] et d'autre part, l'ensemble de cartes à bord simple [12]. En utilisant cette bijection nous arrivons à compter les triangulations et quadrangulations avec un nombre de faces et taille de l'arbre fixés. Cet article est la pierre de base d'un projet de recherche en cours sur la limite d'échelle des quadrangulations décorées par des arbres où la bijection sert de guide pour trouver une transition de phase des possibles limites.

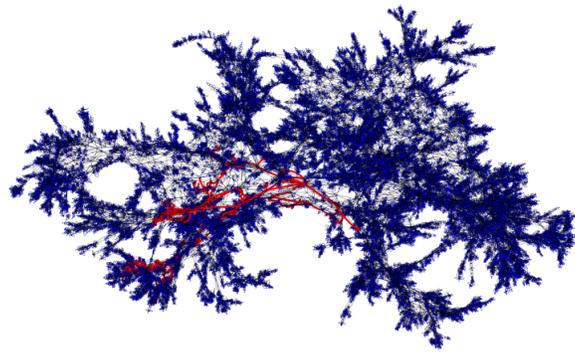


FIGURE 3 – Simulation d'une quadrangulation a 90k faces décorée par un arbre a 500 sommets.

#### 4. Aldous-Broder theorem : extension to the non reversible case and new combinatorial proof.

With J.F. Marckert, 2021, 18 pages.

Accepté dans Random Structures & Algorithms. [Arxiv: 2102.08639](https://arxiv.org/abs/2102.08639).

Le célèbre algorithme d'Aldous-Broder [5, 10] est utilisé pour engendrer uniformément un arbre couvrant d'un graphe connexe  $G$ , mais il est plus général : il dit que donnée une chaîne de Markov réversible à noyau  $M$  issu de  $r$  (nœud du graphe) sur un graphe  $G$ , jusqu'au *Cover Time*<sup>1</sup>, alors l'arbre enraciné sur  $r$  et formé par les pas de première entrée sur chaque nœud (différents de la racine) a probabilité proportionnelle au produit des transitions par  $M$  des arêtes dirigées vers  $r$ . Dans ce papier nous montrons une extension du théorème au cas non-réversible. Notre preuve est combinatoire; elle utilise la théorie des empilements de pièces [22], à la différence de la preuve originale qui utilise le *Coupling from the past* [19].

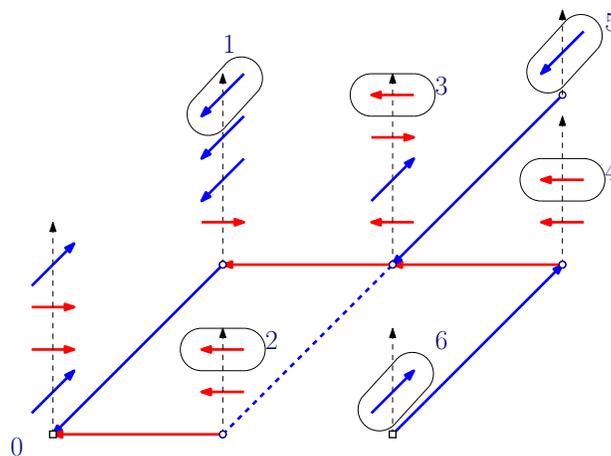


FIGURE 4 – Empilement des pas associé a une marche dans le graphe formé par les arêtes bleues (pointilles et solides) et rouges. Les pas encerclés correspondent aux arêtes présents dans l'arbre couvrant résultant.

1. Premier temps où la chaîne a visité tous les sommets de  $G$

## 5. Models of random subtrees of a graph.

With J.F. Marckert, 2021, 52 pages.

Soumis 08/21. [Arxiv: 2102.12738](#).

L'objectif principal de cette étude est d'explorer la question de la génération uniforme d'un sous-arbre d'un graphe  $G$  donné, ou d'un sous-arbre uniforme de  $G$  avec un nombre fixe  $n$  de sommets, pour  $n$  plus petit que la taille du graphe  $G$ . On résout cette question asymptotiquement, à l'aide de chaînes de Markov. On met l'accent sur le cas du sous-arbre uniforme de  $\mathbb{Z}^2$  contenant l'origine pour lequel Schramm a posé plusieurs questions [20]. Nous présentons des images, statistiques et quelques conjectures.

Le deuxième but est consacré à l'étude d'autres modèles de sous-arbres aléatoires d'un graphe [18, 23, 5, 10], ainsi qu'au survol de ceux existant. Nous proposons des modèles inspirés des modèles DLA, de la percolation de premier passage, de l'arbre couvrant uniforme et l'arbre couvrant minimale. Nous présentons également un certain nombre de nouveaux modèles, des statistiques et des conjectures.

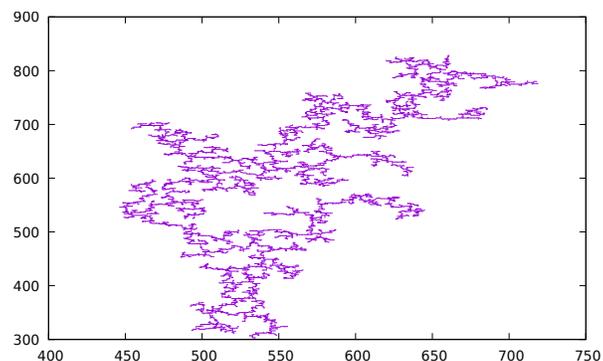


FIGURE 5 – Simulation d'un sous-arbre aléatoire de  $\mathbb{Z}^2$  de taille 10000.

## 6. Non-bijective scaling limit of maps via restriction.

With J. Bettinelli, N. Curien et A. Sepúlveda, 2021, 19 pages.

Soumis 05/21. [Arxiv: 2104.12716](#).

Jusqu'à présent, la plupart des limites d'échelle des cartes planaires sont obtenues à l'aide de bijections explicites [7, 2, 8, 1, 4, 3]; ces études utilisant de manière fine la combinatoire sous-jacente, la plus légère des modifications du modèle de cartes utilisés, nécessite une étude nouvelle [11]. Le but de ce travail est de fournir un cadre pour prouver que, étant donné une famille de cartes aléatoires connue pour converger dans le sens de Gromov–Hausdorff, alors certaines familles conditionnelles (appropriées) de cartes aléatoires convergent vers la même limite. Comme preuve de concept, nous montrons que les quadrangulations à bord simple convergent vers le disque Brownien. La preuve est basée sur la dérivée de Radon-Nikodym entre un morceau des quadrangulations aléatoires à bord et un morceau des quadrangulations aléatoires à bord simple; où le calcul est obtenu grâce aux formules asymptotiques de comptages des objets. L'idée d'une telle comparaison vient du fait que le bord de la limite d'échelle des quadrangulations à bord (général) est simple presque sûrement.

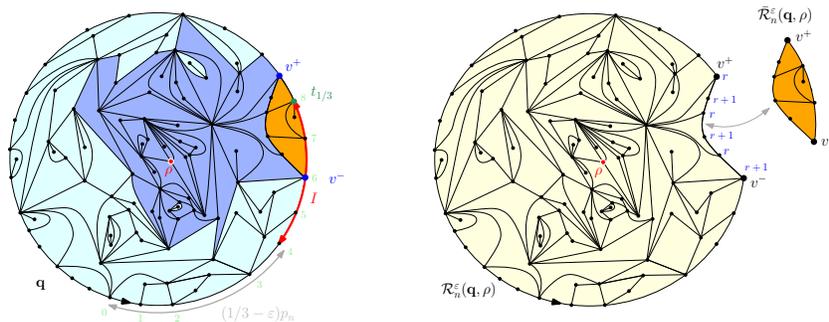


FIGURE 6 – Representation de l’exploration pour trouver le morceaux à comparer dans une carte à bord simple.

## 7. Almost triangular Markov chains on $\mathbb{N}$ .

With J.F. Marckert, 2021, 40 pages.

Soumis 10/21. [Arxiv: 2109.06549](https://arxiv.org/abs/2109.06549).

Une matrice de transition  $U_{i,j}, i, j \geq 0$  sur  $\mathbb{N}$  est dite presque triangulaire supérieure si les incréments des chaînes de Markov correspondantes sont au moins égaux à  $-1$  ; une matrice de transition  $L_{i,j}, i, j \geq 0$  est dite presque triangulaire inférieure si les incréments des chaînes de Markov correspondantes sont au plus égaux à  $+1$  (voir fig. 7). Dans le présent article, nous caractérisons la récurrence, la récurrence positive et la distribution invariante pour la classe des matrices de transition presque triangulaires. Le cas supérieur semble être le plus simple à bien des égards, avec l’existence et l’unicité des mesures invariantes, alors que dans le cas inférieur l’existence ainsi que l’unicité ne sont pas garanties. Nous présentons la connexion par retournement du temps entre les matrices de transition presque triangulaires supérieures et inférieures, ce lien fournit des classes de matrices de transition triangulaires inférieures intégrables.

Ces résultats englobent le cas célèbres des processus de naissance et de mort (BDP) qui sont des chaînes de Markov prenant leurs valeurs dans  $\mathbb{N}$ , qui sont simultanément presque triangulaires supérieurs et presque triangulaires inférieurs (elles sont appelées tri-diagonales), et dont l’étude a été initiée par Karlin and McGregor dans les années 1950 [15]. Ils ont trouvé des mesures invariantes, des critères de récurrence, de récurrence nulle, entre autres ; leur approche repose sur les liens profonds qu’ils ont découverts entre la théorie des BDP, les propriétés spectrales de leurs matrices de transition, le problème du moment et la théorie des polynômes orthogonaux. Notre approche est principalement combinatoire et utilise des méthodes algébriques élémentaires ; elle est en quelque sorte plus directe, et néanmoins, beaucoup plus générale.

Nous présentons aussi différentes applications de nos résultats, qui nous permettent de retrouver des critères de récurrences/transiencies sur les *Repair shop Markov chain* [9], qui ont une matrice de transition presque triangulaire supérieure et qui sont, eux aussi, plus généraux que les BDP.

$$U := \begin{bmatrix} U_{0,0} & U_{0,1} & U_{0,2} & U_{0,3} & U_{0,4} & \cdots \\ U_{1,0} & U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & U_{1,4} & \cdots \\ 0 & U_{2,1} & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} & \cdots \\ 0 & 0 & U_{3,2} & U_{3,3} & U_{3,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots \end{bmatrix}, \quad L := \begin{bmatrix} L_{0,0} & L_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ L_{1,0} & L_{1,1} & L_{1,2} & 0 & 0 & \cdots \\ L_{2,0} & L_{2,1} & L_{2,2} & L_{2,3} & 0 & \cdots \\ L_{3,0} & L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} & L_{3,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots \end{bmatrix}$$

FIGURE 7 – Gauche : matrice presque triangulaire supérieure. Droite : matrice presque triangulaire inférieure.

## Références

- [1] C. ABRAHAM, Rescaled bipartite planar maps converge to the Brownian map, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 52 (2016), pp. 575–595.
- [2] L. ADDARIO-BERRY AND M. ALBENQUE, The scaling limit of random simple triangulations and random simple quadrangulations, *Ann. Probab.*, 45 (2017), pp. 2767–2825.
- [3] ———, Convergence of odd-angulations via symmetrization of labeled trees, Preprint, [arXiv:1904.04786](https://arxiv.org/abs/1904.04786), (2020).
- [4] M. ALBENQUE, N. HOLDEN, AND X. SUN, Scaling limit of large triangulations of polygons, Preprint, [arXiv:1910.04946](https://arxiv.org/abs/1910.04946), (2019).
- [5] D. J. ALDOUS, The random walk construction of uniform spanning trees and uniform labelled trees, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3 (1990), pp. 450–465.
- [6] E. D. ANDJEL, Invariant measures for the zero range processes, *Ann. Probab.*, 10 (1982), pp. 525–547.
- [7] J. BELTRAN AND J.-F. LE GALL, Quadrangulations with no pendant vertices, *Bernoulli*, 19 (2013), pp. 1150–1175.
- [8] J. BETTINELLI, E. JACOB, AND G. MIERMONT, The scaling limit of uniform random plane maps, via the Ambjørn–Budd bijection, *Electron. J. Probab.*, 19 (2014), pp. no. 74, 1–16.
- [9] P. BRÉMAUD, Markov chains : Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues, vol. 31, Springer Science & Business Media, 2013.
- [10] A. Z. BRODER, Generating random spanning trees, in *FOCS*, vol. 89, 1989, pp. 442–447.
- [11] A. CARRANCE, Convergence of eulerian triangulations, Preprint, [arXiv:1912.13434](https://arxiv.org/abs/1912.13434), (2019).
- [12] N. CURIEN AND G. MIERMONT, Uniform infinite planar quadrangulations with a boundary, *Random Structures & Algorithms*, 47 (2015), pp. 30–58.
- [13] R. DURRETT AND D. REMENIK, Chaos in a spatial epidemic model, *Ann. Appl. Probab.*, 19 (2009), pp. 1656–1685.
- [14] P. FLAJOLET AND R. SEDGEWICK, Analytic combinatorics, Cambridge University Press, 2009.
- [15] S. KARLIN AND J. MCGREGOR, The classification of birth and death processes, *Transactions of the American Mathematical Society*, 86 (1957), pp. 366–400.
- [16] T. M. LIGGETT, An infinite particle system with zero range interactions, *Ann. Probability*, 1 (1973), pp. 240–253.
- [17] ———, Interacting particle systems, *Classics in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reprint of the 1985 original.
- [18] Y. MÉTIVIER, N. SAHEB-DJAHROMI, AND A. ZEMMARI, Locally guided randomized elections in trees : The totally fair case, *Information and Computation*, 198 (2005), pp. 40–55.
- [19] J. G. PROPP AND D. B. WILSON, Exact sampling with coupled markov chains and applications to statistical mechanics, *Random Structures & Algorithms*, 9 (1996), pp. 223–252.
- [20] O. SCHRAMM, Conformally invariant scaling limits : an overview and a collection of problems, *Selected Works of Oded Schramm*, (2011), pp. 1161–1191.
- [21] J. M. SWART, A Course in Interacting Particle Systems, (2017).
- [22] G. X. VIENNOT, Heaps of pieces, i : Basic definitions and combinatorial lemmas, in *Combinatoire énumérative*, Springer, 1986, pp. 321–350.
- [23] D. B. WILSON, Generating random spanning trees more quickly than the cover time, in *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, 1996, pp. 296–303.