Math discrètes, probabilités et statistique

Luis Fredes

2025–2026

Table des matières

1 Algèbre et suites numériques (12 h) 7

1.1 Langage, sommes et récurrence (séance 1) . . . 7
1.1.1 Ensembles . . . 7
1.1.2 Applications . . . 8
1.1.3 Quantificateurs et raisonnements . . . 8
1.1.4 Le symbole $\sum$ . . . 9
1.1.5 Raisonnement par récurrence . . . 10
1.1.6 Coefficients binomiaux . . . 10
1.2 Lois de composition et groupes (séance 2) . . . 10
1.2.1 Lois de composition . . . 11
1.2.2 Les groupes . . . 11
1.2.3 Rappels sur les nombres complexes . . . 12
1.2.4 Trois familles de groupes à connaître . . . 12
1.2.5 Sous-groupes . . . 13
1.3 Anneaux, corps et polynômes (séance 3) . . . 14
1.3.1 Les anneaux . . . 14
1.3.2 Les corps . . . 15
1.3.3 Polynômes . . . 15
1.4 Systèmes linéaires et espaces vectoriels (séance 4) . . . 16
1.4.1 Systèmes linéaires et méthode de Gauss . . . 16
1.4.2 Espaces vectoriels . . . 17
1.5 Calcul matriciel (séance 5) . . . 19
1.5.1 Opérations sur les matrices . . . 19
1.5.2 Matrices inversibles et déterminant . . . 20
1.5.3 Valeurs propres et diagonalisation . . . 22
1.6 Suites et séries numériques (séance 6) . . . 23
1.6.1 Inégalités et valeur absolue . . . 23
1.6.2 Suites convergentes . . . 23
1.6.3 Suites monotones et suites récurrentes . . . 24
1.6.4 Séries numériques . . . 24

2 Théorie des probabilités (12 h) 27

2.1 Dénombrement et calcul des probabilités (séance 1) . . . 28
2.1.1 Principe multiplicatif . . . 28
2.1.2 Arrangements . . . 28
2.1.3 Permutations . . . 29
2.1.4 Combinaisons . . . 30

2.1.5 Enlever les doublons dans le comptage . . . 31
2.2 Probabilités . . . 31
2.2.1 Probabilité (séance 2) . . . 34
2.2.2 Probabilité conditionnelle . . . 35
2.2.3 Indépendance . . . 37
2.2.4 Formule des probabilités totales . . . 38
2.2.5 Formule de Bayes . . . 39
2.3 Variables aléatoires (séance 3) . . . 40
2.3.1 Fonction de répartition . . . 41
2.3.2 Espérance . . . 42
2.3.3 Fonction caractéristique . . . 43
2.4 Variables aleatoires discrètes . . . 44
2.4.1 Lois discrètes usuelles . . . 45
2.4.2 Loi de Bernoulli . . . 45
2.4.3 Loi binomiale . . . 45
2.4.4 Loi géométrique . . . 46
2.4.5 Loi de Poisson . . . 47
2.5 Variables aléatoires continues (séance 4) . . . 48
2.6 Lois continues usuelles . . . 49
2.6.1 Loi uniforme . . . 49
2.6.2 Loi exponentielle . . . 50
2.6.3 Loi Gamma . . . 51
2.6.4 Loi normale . . . 51
2.7 Couples de variables aléatoires (séance 5) . . . 53
2.7.1 Loi jointe . . . 53
2.7.2 Covariance . . . 55
2.7.3 Loi conditionnelle . . . 57
2.7.4 Fonction caractéristique jointe . . . 57
2.8 Inégalités et théorèmes limites (séance 6) . . . 61
2.8.1 Inégalité de Markov . . . 62
2.8.2 Inégalité de Tchebychev . . . 62
2.8.3 Loi des grands nombres . . . 63
2.8.4 Théorème central limite . . . 63

3 Statistiques (6h) 65
3.1 Statistique descriptive (séance 1) . . . 65
3.1.1 Population, individus et variables . . . 65
3.1.2 Effectifs et fréquences . . . 66
3.1.3 Regroupement des données . . . 66
3.1.4 Représentations graphiques . . . 67
3.2 Analyse descriptive univariée (séance 2) . . . 67
3.2.1 Paramètres de position . . . 68
3.2.2 Paramètres de dispersion . . . 70
3.3 Introduction à l'estimation (séance 3) . . . 72
3.3.1 Estimateurs . . . 72
3.3.2 Biais et variance d'un estimateur . . . 72
3.3.3 Estimation ponctuelle . . . 74
3.4 Intervalles de confiance pour la moyenne . . . 75

3.4.1 Utilisation d'inégalités 75
3.4.2 Utilisation du Théorème Central Limite 77

Chapitre 1

Algèbre et suites numériques (12 h)

Organisation du chapitre

Ce chapitre est un cours de mise à niveau : il rassemble le langage et les outils de calcul qui servent ensuite pour les matrices, les suites et séries, et les probabilités (chapitre 2). Il est organisé en six séances de 2 h de cours-TD intégré : chaque notion est immédiatement suivie d'exercices.

Séance	Thème
1	Langage, sommes $\sum$, récurrence, binôme
2	Lois de composition, groupes
3	Anneaux, corps, polynômes
4	Systèmes linéaires, espaces vectoriels
5	Calcul matriciel
6	Suites et séries numériques

Niveaux des exercices : $\star$ application directe (en classe, juste après le cours) ; $\star\star$ entraînement ; $\star\star\star$ approfondissement ou travail personnel.

1.1 Langage, sommes et récurrence (séance 1)

1.1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets, appelés ses **éléments**. On note $x \in E$ lorsque x est un élément de E, et $\emptyset$ l'ensemble vide.

Définition 1.1.1. Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
- $A \subset B$ (inclusion) si tout élément de A est un élément de B.
- $A = B$ si $A \subset B$ et $B \subset A$ (double inclusion).
- $A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (réunion)
- $A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$ (intersection).
- $\overline{A} = A^c = \{x \in E : x \notin A\}$ (complémentaire)
- $A \setminus B = A \cap B^c$ (différence).
- $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de toutes les parties de E.

Proposition 1.1.1 (Lois de De Morgan)**.**

— $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
— $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Définition 1.1.2. Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble des couples

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E,\ y \in F\}.$$

On note $E^2 = E \times E$, et plus généralement $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n fois).

Exemple 1.1.1. $\{1, 2\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ a $2 \times 3 = 6$ éléments. Un point du plan est un élément de $\mathbb{R}^2$.

1.1.2 Applications

Définition 1.1.3. Une **application** $f : E \to F$ associe à chaque $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$, appelé **image** de x. Si $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y. L'application f est :

— **injective** si deux éléments distincts ont des images distinctes :

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x';$$

— **surjective** si tout $y \in F$ a au moins un antécédent ;
— **bijective** si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si tout $y \in F$ a exactement un antécédent. On note alors $f^{-1} : F \to E$ l'application inverse, qui à y associe son unique antécédent.

Lecture. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, injective signifie que toute droite horizontale coupe le graphe au plus une fois ; surjective, au moins une fois ; bijective, exactement une fois.

Définition 1.1.4. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$, la **composée** $g \circ f : E \to G$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exercice 1.1.1 ($\star\star$ Injective, surjective, bijective)**.** On considère $f(x) = x^2$.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?
2. Même question pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Donner sa réciproque si elle existe.
3. Montrer que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$, est bijective et calculer g^{-1}.

1.1.3 Quantificateurs et raisonnements

Notation. $\forall$ se lit « pour tout » et $\exists$ se lit « il existe ». Les quantificateurs servent à écrire des énoncés précis et leurs négations ; on ne les utilise pas comme abréviations au milieu d'une phrase.

L'ordre des quantificateurs compte : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x$ » est vrai (on prend $y = x + 1$), alors que « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x$ » est faux (aucun réel n'est plus grand que tous les autres).

Proposition 1.1.2 (Négation)**.** *Pour nier un énoncé, on échange $\forall$ et $\exists$ et on nie la propriété finale :*

$$non\big(\forall x,\ P(x)\big) = \exists x,\ non\, P(x), \qquad non\big(\exists x,\ P(x)\big) = \forall x,\ non\, P(x).$$

Définition 1.1.5. Soient P et Q deux propositions. L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse seulement si P est vraie et Q fausse.

— Sa **réciproque** est $Q \Rightarrow P$; elle peut être fausse alors que $P \Rightarrow Q$ est vraie.
— Sa **contraposée** est non $Q \Rightarrow$ non P ; elle est *équivalente* à $P \Rightarrow Q$.

Exemple 1.1.2. « $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ » est vraie, sa réciproque « $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ » est fausse ($x = -2$ est un autre valeur qui a $x^2 = 4$). La contraposée « $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$ » est vraie.

Remarque (Raisonnement par l'absurde). Pour montrer P, on suppose non P et on aboutit à une contradiction. Exemple classique : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1.1.2 ($\star$ Négations)**.** Écrire la négation des énoncés suivants et dire s'ils sont vrais.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$.
2. $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 2$.
3. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$.

1.1.4 Le symbole $\sum$

Définition 1.1.6. Pour des nombres $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ (avec $m \leq n$), on note

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n.$$

La lettre k est un indice **muet** : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2$.

Proposition 1.1.3 (Règles de calcul)**.**

1. *Linéarité :* $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \sum_{k=m}^{n} b_k$.
2. *Somme d'une constante :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$ *(il y a* n *termes).*
3. *Changement d'indice :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j$ *(on a posé* $j = k+1$*).*
4. *Télescopage :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$.

Proposition 1.1.4 (Sommes de référence)**.** *Pour* $n \geq 1$ *et* $q \neq 1$ *:*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1$.

Démonstration. En écrivant $S = 1 + 2 + \cdots + n$ et $S = n + (n-1) + \cdots + 1$ puis en sommant terme à terme, on obtient $2S = n(n+1)$. Pour la somme géométrique, $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = 1 - q^{n+1}$ par télescopage. □

Exercice 1.1.3 ($\star$ Manipuler $\sum$)**.** Écrire $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ avec le symbole $\sum$, puis la calculer.

Exercice 1.1.4 (⋆⋆ Somme télescopique)**.**

1. Vérifier que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour $k \geq 1$.
2. En déduire $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 1.1.5 (⋆⋆ Somme double)**.** Calculer $U_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j)$.

1.1.5 Raisonnement par récurrence

Théorème 1.1.1 (Principe de récurrence)**.** *Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si*

— ***(initialisation)*** *$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,*

— ***(hérédité)*** *pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$,*

alors ***(conclusion)*** *$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.*

Lecture. C'est l'effet domino : le premier domino tombe, et chaque domino qui tombe fait tomber le suivant. Une récurrence se rédige toujours en trois temps : initialisation, hérédité, conclusion.

Exercice 1.1.6 (⋆⋆ Une récurrence)**.** Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.1.6 Coefficients binomiaux

Définition 1.1.7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (avec $0! = 1$) et, pour $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ce nombre compte les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments (chapitre 2).

Proposition 1.1.5.

1. *Symétrie :* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. *Formule de Pascal :* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
3. *Binôme de Newton : pour tous a, b réels ou complexes,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 1.1.7 (⋆ ⋆ ⋆ Applications du binôme)**.** Pour $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. Interpréter la première en termes de parties d'un ensemble à n éléments.

1.2 Lois de composition et groupes (séance 2)

Les structures algébriques permettent de formaliser les opérations utilisées dans de nombreux domaines de l'ingénierie : traitement du signal, théorie des codes, calcul matriciel,

électronique numérique. Elles mettent en évidence ce qui est commun à des calculs en apparence très différents.

1.2.1 Lois de composition

Définition 1.2.1. Une **loi de composition interne** sur un ensemble E est une application

$$* : E \times E \to E, \qquad (x, y) \mapsto x * y.$$

Le mot « interne » signifie que le résultat reste dans E.

Exemple 1.2.1.

1. Sur $\mathbb{R}$, la somme $(x, y) \mapsto x + y$ et la multiplication $(x, y) \mapsto xy$ sont des lois internes.
2. La soustraction est une loi interne sur $\mathbb{Z}$, mais pas sur $\mathbb{N}$: $1 - 2 \notin \mathbb{N}$.
3. La composition de fonctions $\circ$ est une loi interne sur l'ensemble des applications de E dans E.

Définition 1.2.2. La loi $*$ sur E est :
— **associative** si $(x * y) * z = x * (y * z)$ pour tous $x, y, z \in E$;
— **commutative** si $x * y = y * x$ pour tous $x, y \in E$.
Un élément $e \in E$ est un **élément neutre** si $x * e = e * x = x$ pour tout $x \in E$. Si $*$ a un neutre e, un élément y est un **symétrique** (ou inverse) de x si $x * y = y * x = e$.

Remarque. Quand E est fini, on peut décrire une loi par sa **table** : la case (ligne x, colonne y) contient $x * y$.

Exercice 1.2.1 ($\star$ Reconnaître une loi)**.** Pour chacune des lois suivantes, dire si elle est interne, associative, commutative, et si elle a un élément neutre :

1. $a - b$ sur $\mathbb{Z}$.
2. $x * y = \frac{x+y}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\max(a, b)$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 1.2.2 ($\star\star$ Une loi déguisée)**.** Sur $\mathbb{R}$, on définit $x \diamond y = x + y + xy$.

1. Montrer que $\diamond$ est commutative et associative.
2. Déterminer un élément neutre.
3. Pour quelles valeurs de x existe-t-il un inverse ? Le calculer.
4. Vérifier que $1 + (x \diamond y) = (1 + x)(1 + y)$. Qu'en déduire sur $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \diamond)$?

1.2.2 Les groupes

Définition 1.2.3. Un **groupe** $(G, *)$ est un ensemble G muni d'une loi interne qui est :

1. associative ;
2. possède un élément neutre ;
3. tout élément possède un inverse.

Le groupe est dit **abélien** (ou commutatif) si la loi est commutative.

Exemple 1.2.2.

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes abéliens : neutre 0, inverse de a égal à $-a$.

2. $(\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe abélien : neutre 1, inverse de x égal à $\frac{1}{x}$. En revanche $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe : 0 n'a pas d'inverse.
3. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe : 1 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{N}$.

Proposition 1.2.1. *Dans un groupe $(G, *)$:*

1. *le neutre est unique, et chaque élément a un unique inverse, noté x^{-1} ;*
2. *$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.*

Démonstration. Si e et e' sont neutres, $e = e * e' = e'$. Si y et y' sont inverses de x, alors $y = y * e = y * (x * y') = (y * x) * y' = e * y' = y'$. Enfin $(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = x * (y * y^{-1}) * x^{-1} = x * x^{-1} = e$, et de même dans l'autre sens. □

Lecture. Pour défaire « y puis x », on défait d'abord le dernier : on enlève les chaussures avant les chaussettes. Le même phénomène donnera $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ pour les matrices.

1.2.3 Rappels sur les nombres complexes

On note $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$, avec $i^2 = -1$ (en électricité on écrit j ; en mathématiques on écrit i).

Définition 1.2.4. Pour $z = a + ib$:
— la **partie réelle** est $\mathrm{Re}(z) = a$,
— la **partie imaginaire** est $\mathrm{Im}(z) = b$,
— le **conjugué** est $\bar{z} = a - ib$ et
— le **module** est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
On a $z\bar{z} = |z|^2$ et $|zw| = |z||w|$.

Définition 1.2.5. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Tout $z \neq 0$ s'écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$; θ est un **argument** de z (défini à 2π près).

Proposition 1.2.2. *Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:*

$$e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}, \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \quad \textit{(Moivre)},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \textit{(Euler)}.$$

Exemple 1.2.3. $|1 + i| = \sqrt{2}$ et un argument est $\frac{\pi}{4}$, donc $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ et $(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{2i\pi} = 16$.

1.2.4 Trois familles de groupes à connaître

Le cercle unité et les racines de l'unité. L'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ est un groupe abélien pour la multiplication : multiplier sur le cercle, c'est additionner les angles. Pour $n \geq 1$, l'ensemble des **racines n-ièmes de l'unité**

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} = \left\{e^{2ik\pi/n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}$$

a n éléments, régulièrement répartis sur le cercle.

Les entiers modulo n. Soit $n \geq 2$. Deux entiers a et b sont **congrus modulo** n si n divise $a - b$; on note $[a]$ la classe de a (l'ensemble des entiers congrus à a), et

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}.$$

On pose $[a] + [b] = [a + b]$ et $[a] \times [b] = [ab]$. Alors $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien à n éléments, de neutre $[0]$: c'est l'arithmétique de l'horloge ($n = 12$). Pour $n = 2$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ et l'addition est le « ou exclusif » (XOR) de l'électronique numérique.

Les permutations. Une **permutation** de $\{1, \ldots, n\}$ est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même. L'ensemble S_n des permutations, muni de la composition $\circ$, est un groupe à $n!$ éléments : neutre l'identité, inverse la bijection réciproque. Pour $n \geq 3$, il n'est *pas* abélien.

1.2.5 Sous-groupes

Définition 1.2.6. Soit $(G, *)$ un groupe. Une partie $H \subset G$ est un **sous-groupe** si :
- elle contient l'élément neutre ;
- elle est stable par la loi : $x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$;
- elle est stable par passage à l'inverse : $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

Un sous-groupe est lui-même un groupe pour la même loi (l'associativité est hérité, car les elements de H sont dans G et dans G la loi est asociative).

Exemple 1.2.4. Les entiers pairs $2\mathbb{Z}$ forment un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$: $0 \in 2\mathbb{Z}$, $2a + 2b = 2(a + b)$ et $-2a = 2(-a)$. Plus généralement $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. En revanche $\mathbb{N}$ n'en est pas un (pas stable par passage à l'opposé).

Exercice 1.2.3 ($\star$ Groupe ou pas ?)**.** Les ensembles suivants sont-ils des groupes ? Justifier.

$$(\{-1, 1\}, \times), \qquad (2\mathbb{Z} + 1, +), \qquad (\mathbb{Q}^*, \times), \qquad (\mathbb{Z}^*, \times).$$

Exercice 1.2.4 ($\star\star$ Le cercle unité)**.**

1. Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe abélien. Quel est l'inverse de $z \in \mathbb{U}$?
2. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$ et retrouver ses éléments.
3. Dresser la table de multiplication de $\mathbb{U}_4$.

Exercice 1.2.5 ($\star\star$ Arithmétique modulaire et bit de parité)**.**

1. Dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, calculer $[9] + [7]$ et l'inverse de $[5]$.
2. Dresser la table de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.
3. On transmet un mot $(b_1, \ldots, b_7) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ suivi du bit de parité $p = b_1 + \cdots + b_7$ (calculé dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Montrer que si un seul bit est modifié pendant la transmission, l'erreur est détectée.

Exercice 1.2.6 ($\star\star$ Un groupe non commutatif)**.** Soient $\sigma \in S_3$ qui échange 1 et 2 (et fixe 3), et $\tau \in S_3$ qui échange 2 et 3 (et fixe 1).

1. Combien S_3 a-t-il d'éléments ?
2. Calculer $\sigma \circ \tau$ et $\tau \circ \sigma$. Conclure.

1.3 Anneaux, corps et polynômes (séance 3)

1.3.1 Les anneaux



Définition 1.3.1. Un **anneau** est un ensemble A muni de deux lois internes[1] notées $+$ et $\times$ telles que :

1. $(A, +)$ est un groupe abélien (de neutre noté 0) ;
2. la multiplication est associative et possède un neutre noté 1 ;
3. la multiplication est distributive sur l'addition :

$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{et} \quad (a+b)c = ac + bc, \qquad \forall a, b, c \in A.$$

L'anneau est **commutatif** si $ab = ba$ pour tous $a, b \in A$.

Exemple 1.3.1.

1. $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.
2. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif à n éléments.
3. L'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées 2×2 réelles, muni de la somme et du produit
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix},$$
est un anneau, de neutre $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Attention : il n'est pas commutatif (on verra dans la suite).

Définition 1.3.2. Soit A un anneau.

— Un élément $a \in A$ est **inversible** (par rapport à la multiplication) s'il existe $b \in A$ tel que $ab = ba = 1$. Les inversibles de A forment un groupe pour $\times$.

— Deux éléments $a \neq 0$ et $b \neq 0$ tels que $ab = 0$ sont des **diviseurs de zéro**.

Exemple 1.3.2. Les inversibles de $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1. Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $[2] \times [3] = [6] = [0]$: $[2]$ et $[3]$ sont des diviseurs de zéro. Dans $\mathbb{R}$, il n'y en a pas : $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

1. Ce sont juste deux symboles : selon l'ensemble, la « somme » et le « produit » peuvent être bien plus abstraits que ceux que l'on connaît.

Remarque. Un diviseur de zéro n'est jamais inversible (par rapport à la multiplication) : si $ab = 0$ avec $b \neq 0$ et si a avait un inverse, on aurait $b = a^{-1}ab = 0$.

1.3.2 Les corps

Définition 1.3.3. Un **corps** est un anneau commutatif dans lequel $0 \neq 1$ et tout élément non nul possède un inverse pour la multiplication.

Exemple 1.3.3.

1. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps. Dans $\mathbb{C}$, l'inverse de $z \neq 0$ est $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, car $z\bar{z} = |z|^2$.
2. $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps : 2 n'a pas d'inverse entier.
3. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ est un corps : c'est le corps des bits.

Théorème 1.3.1. *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.*

La démonstration fait l'objet de l'exercice 1.3.2.

Notation. Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Presque tout ce qui suit (systèmes, matrices, espaces vectoriels) fonctionne sur n'importe quel corps, par exemple $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en théorie des codes.

Exercice 1.3.1 ($\star$ $\mathbb{C}$ est un corps)**.**

1. Calculer $\frac{1}{3+4i}$ sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Exercice 1.3.2 ($\star\star$ Quand $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il un corps ?)**.**

1. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?
2. Montrer que si n n'est pas premier, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un corps.
3. Soit p premier et $[a] \neq [0]$. Montrer que $x \mapsto [a]x$ est injective sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, puis qu'elle est surjective. En déduire que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.
4. Calculer l'inverse de $[3]$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 1.3.3 ($\star\star$ L'anneau des matrices 2×2)**.**

1. Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer AB, BA et A^2. Commenter.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer $M \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. En déduire que M est inversible si $ad - bc \neq 0$ et donner M^{-1}.

1.3.3 Polynômes

Définition 1.3.4. Un **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n et a_n est son coefficient dominant. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes, et $\mathbb{K}_n[X]$ ceux de degré au plus n.

Proposition 1.3.1. *$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif et, pour $P, Q \neq 0$,*

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q), \qquad \deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

En particulier $\mathbb{K}[X]$ n'a pas de diviseurs de zéro, et ses inversibles sont les constantes non nulles.

Définition 1.3.5. $a \in \mathbb{K}$ est une **racine** de P si $P(a) = 0$.

Théorème 1.3.2.

1. *a est racine de P si et seulement si P se factorise par $(X - a)$: $P = (X - a)Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$.*
2. *Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines.*
3. ***(d'Alembert-Gauss, admis)** Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, tout polynôme de degré $n \geq 1$ se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ en $a_n(X - z_1)\cdots(X - z_n)$.*

Proposition 1.3.2 (Second degré)**.** *Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta \geq 0$, les racines sont $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Dans tous les cas, la somme des racines vaut $-\frac{b}{a}$ et leur produit $\frac{c}{a}$.*

Exercice 1.3.4 ($\star\star$ Factorisation)**.** Factoriser $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$. Faire le lien avec $\mathbb{U}_3$.

Exercice 1.3.5 ($\star\star\star$ Les entiers de Gauss)**.** On considère $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $N(z) = |z|^2 = a^2 + b^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est stable par addition et multiplication, et que c'est un anneau commutatif.
2. Montrer que $N(zw) = N(z)N(w)$.
3. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$. Est-ce un corps ?

Spoiler. Les valeurs propres d'une matrice sont les racines d'un polynôme (séance 5) : elles peuvent être complexes même si la matrice est réelle. C'est pourquoi on a besoin du corps $\mathbb{C}$.

1.4 Systèmes linéaires et espaces vectoriels (séance 4)

1.4.1 Systèmes linéaires et méthode de Gauss

Définition 1.4.1. Un **système linéaire** de n équations à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ est

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont dans $\mathbb{K}$. Il est **homogène** si tous les b_i sont nuls.

Définition 1.4.2. Une **matrice** de taille $n \times p$ est un tableau $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq p}$ de n lignes et p colonnes ; on note $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Le produit de A par un vecteur colonne $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est le vecteur colonne AX de coordonnées

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Le système s'écrit donc $AX = B$, où $A = (a_{ij})$, $X = (x_j)$ et $B = (b_i)$. Par exemple,

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \text{s'écrit} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.4.3. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système sont :
— échanger deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$;
— multiplier une ligne par un scalaire non nul : $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$;
— ajouter à une ligne un multiple d'une *autre* ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $j \neq i$.
Elles ne changent pas l'ensemble des solutions.

Définition 1.4.4. Un système est **échelonné** si chaque ligne commence (premier coefficient non nul, appelé **pivot**) strictement plus à droite que la précédente. La **méthode de Gauss** consiste à se ramener, par opérations élémentaires, à un système échelonné, puis à le résoudre en « remontant » à partir de la dernière ligne.

Théorème 1.4.1. *Après échelonnement, trois cas sont possibles :*

1. *une ligne se réduit à $0 = c$ avec $c \neq 0$: **aucune solution** (système incompatible) ;*
2. *sinon, s'il y a autant de pivots que d'inconnues : **une unique solution** ;*
3. *sinon : **une infinité de solutions**, que l'on exprime en fonction des inconnues sans pivot (paramètres).*

Exemple 1.4.1. Le système

$$\begin{cases} x + y - z & = 1 \\ 2x + 3y + z & = 4 \end{cases}$$

est transformé de la façon suivante : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $y + 3z = 2$. Les pivots portent sur x et y, et z est un paramètre : $y = 2 - 3z$, $x = 1 - y + z = -1 + 4z$. Les solutions sont $\{(-1 + 4z,\ 2 - 3z,\ z) : z \in \mathbb{R}\}$, une droite de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.4.1 ($\star$ Pivot de Gauss)**.** Résoudre le système suivant avec la méthode de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z & = 6 \\ x + 2y + 3z & = 14 \\ 2x + y + z & = 7, \end{cases}$$

puis écrire le système sous la forme $AX = B$.

Exercice 1.4.2 ($\star\star$ Discussion selon un paramètre)**.** Discuter, suivant $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x + ay + z & = 2 \\ x + y + az & = 2 \end{cases}$$

1.4.2 Espaces vectoriels

Les espaces vectoriels constituent l'outil central de l'algèbre linéaire : ce sont les ensembles dans lesquels on peut faire des *combinaisons linéaires* $\lambda u + \mu v$.

Définition 1.4.5. Un **espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni
— d'une addition $+$ telle que $(E, +)$ soit un *groupe abélien* (de neutre noté 0_E, le vecteur nul) ;
— d'une multiplication externe $\mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$,
telles que, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$ elle satisfait :

1. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,
2. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$,

3. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$,
4. $1\,u = u$.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, ceux de $\mathbb{K}$ **scalaires**.

Exemple 1.4.2.

1. $\mathbb{K}^n$, avec les opérations coordonnée par coordonnée.
2. $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ (polynômes de degré au plus n).
3. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, l'ensemble des suites réelles.
4. $M_{n,p}(\mathbb{K})$, avec la somme et la multiplication par un scalaire coefficient par coefficient.
5. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: les mots binaires de longueur n.

Sous-espaces vectoriels

Définition 1.4.6. Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** si
— $0_E \in F$;
— F est stable par combinaison linéaire : $u, v \in F,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u + \mu v \in F$.
Ceci implique que lui-même est un espace vectoriel.

Proposition 1.4.1. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire* homogène $AX = 0$ *à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. En revanche, si $B \neq 0$, l'ensemble des solutions de $AX = B$ n'en est pas un : il ne contient pas* 0.

Exemple 1.4.3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (un plan passant par l'origine).

Exercice 1.4.3 ($\star$ Sous-espaces vectoriels ?)**.** Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$F_1 = \{(x,y) : x + y = 0\}, \qquad F_2 = \{(x,y) : x + y = 1\}, \qquad F_3 = \{(x,y) : xy = 0\}.$$

Familles libres, génératrices, bases

Définition 1.4.7. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de E.
— Une **combinaison linéaire** de ces vecteurs est un vecteur $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$.
— La famille est **libre** (linéairement indépendante) si

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Sinon, elle est **liée** : l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
— La famille est **génératrice** de E si tout $v \in E$ est une combinaison linéaire des v_i.
— C'est une **base** si elle est libre et génératrice : tout $v \in E$ s'écrit alors de manière *unique* $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont les **coordonnées** de v dans cette base.

Lecture. Dans $\mathbb{K}^n$, savoir si une famille est libre ou génératrice revient à résoudre un *système linéaire* : on utilise la méthode de Gauss.

Exemple 1.4.4. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base, appelée base canonique. Dans $\mathbb{K}_n[X]$, $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base.

Théorème 1.4.2 (admis)**.** *Si E possède une base finie, toutes ses bases ont le même nombre d'éléments, appelé la* ***dimension*** *de E et noté* $\dim E$.

Exemple 1.4.5. $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ (par exemple $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$), $\dim M_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.

Exercice 1.4.4 ($\star\star$ Familles libres, bases)**.**

1. Montrer que $(1,0,1), (0,1,1), (1,1,2)$ ne forment pas une famille libre.
2. Trouver une base et la dimension de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$.

Exercice 1.4.5 ($\star\star$ Coordonnées dans une base)**.** Soient $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1)$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire $(2,3,1)$ dans cette base.

Exercice 1.4.6 ($\star\star$ Dans un espace de polynômes)**.** Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère $\mathcal{F} = (1+X,\ X+X^2,\ 1+2X+X^2)$.

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. Extraire une base de l'espace engendré par $\mathcal{F}$.

Exercice 1.4.7 ($\star\star\star$ Le corps compte !)**.**

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ le système $2x + y = 1$, $x + 2y = 0$. Comparer avec la solution dans $\mathbb{R}$.
2. Le même système a-t-il une solution dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?
3. Dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, la famille (u_1, u_2, u_3) de l'exercice 1.4.5 est-elle libre ?

1.5 Calcul matriciel (séance 5)

L'algèbre matricielle constitue un outil essentiel en génie électrique : elle intervient dans l'étude des réseaux électriques, des systèmes dynamiques, du traitement du signal et de la commande.

1.5.1 Opérations sur les matrices

Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ et $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$: on opère coefficient par coefficient. Lorsque $n = p$, la matrice est dite **carrée** d'ordre n et on note $M_n(\mathbb{K})$.

Définition 1.5.1 (Produit matriciel)**.** Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, le produit $C = AB \in M_{n,q}(\mathbb{K})$ est défini par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Lecture. Le coefficient (i,j) de AB s'obtient en « multipliant » la ligne i de A par la colonne j de B. Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Proposition 1.5.1. *Le produit matriciel est associatif, distributif par rapport à l'addition,*

et admet pour neutre la ***matrice identité***

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} : \qquad AI_n = I_n A = A \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K}).$$

Ainsi $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est un anneau,* ***non commutatif*** *si* $n \geq 2$ *: en général* $AB \neq BA$.

Définition 1.5.2. La **transposée** de $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $A^T \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant lignes et colonnes : $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. On a $(A+B)^T = A^T + B^T$ et $(AB)^T = B^T A^T$.

Définition 1.5.3. La **trace** d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exemple 1.5.1. Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$

alors $\mathrm{tr}(A) = 2 + 4 - 5 = 1$.

Exercice 1.5.1 ($\star$ Produit et transposée)**.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner les tailles de A, B, AB et BA.
2. Calculer AB et BA.
3. Vérifier que $(AB)^T = B^T A^T$.

1.5.2 Matrices inversibles et déterminant

Définition 1.5.4. Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est un *groupe* pour le produit, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (proposition 1.2.1).

Proposition 1.5.2 (Inverse par la méthode de Gauss-Jordan)**.** *A est inversible si et seulement si la méthode de Gauss appliquée au tableau $[A \,|\, I_n]$ permet d'obtenir $[I_n \,|\, C]$; on a alors $C = A^{-1}$.*

Définition 1.5.5. Le **déterminant** d'une matrice carrée est défini récursivement.

— Pour une matrice d'ordre 1, $\det(a_{11}) = a_{11}$.

— Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$, on note A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A, et on développe suivant la première ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, \det(A_{1j}).$$

Exemple 1.5.2. Pour $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Pour $n = 3$, en développant :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (2-3) - 1 \cdot (1-6) + 1 \cdot (1-4) = -1 + 5 - 3 = 1.$$

Remarque (Interprétation géométrique du déterminant). $|\det(A)|$ est le facteur par lequel l'application linéaire $x \mapsto Ax$ multiplie les volumes. En dimension 2, c'est l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs colonnes de A ; en dimension 3, le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs colonnes. Ainsi $|\det(A)| > 1$ correspond à une dilatation des volumes, $0 < |\det(A)| < 1$ à une contraction, et $\det(A) = 0$ signifie que la transformation écrase l'espace sur un sous-espace de dimension strictement inférieure. Le signe du déterminant indique si l'orientation est préservée ($\det(A) > 0$) ou inversée ($\det(A) < 0$).

Théorème 1.5.1. *Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$:*

1. *A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$;*
2. *$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et*
3. *$\det(A^T) = \det(A)$ (admis).*

Définition 1.5.6. Le **rang** de $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le nombre de pivots obtenus par la méthode de Gauss ; c'est aussi le nombre maximal de colonnes (ou de lignes) formant une famille libre.

Théorème 1.5.2. *Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est inversible ;*
2. *$\det(A) \neq 0$;*
3. *$\mathrm{rg}(A) = n$;*
4. *pour tout B, le système $AX = B$ a une unique solution, à savoir $X = A^{-1}B$.*

Si $\mathrm{rg}(A) < n$, le système $AX = B$ a soit aucune solution, soit une infinité.

Exercice 1.5.2 ($\star$ Inversibilité selon un paramètre)**.** Pour $a \in \mathbb{R}$, soit

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour quels a est-elle inversible ? Calculer A_1^{-1} et vérifier que $A_1 A_1^{-1} = I_2$.

Exercice 1.5.3 ($\star\star$ Inverse par Gauss-Jordan)**.** Inverser la matrice A de l'exercice 1.4.1 en appliquant la méthode de Gauss à $[A \,|\, I_3]$, puis retrouver la solution de cet exercice en calculant $A^{-1}B$.

Exercice 1.5.4 ($\star\star$ Rang)**.** Déterminer le rang des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sont-elles inversibles ?

1.5.3 Valeurs propres et diagonalisation

Définition 1.5.7. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $Av = \lambda v$; un tel v est un **vecteur propre** associé à λ.

Cela revient à dire que le système homogène $(A - \lambda I_n)v = 0$ a une solution non nulle, c'est-à-dire que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Les valeurs propres sont donc les racines du **polynôme caractéristique**

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n),$$

qui est de degré n : A a au plus n valeurs propres, et exactement n dans $\mathbb{C}$ si on les compte avec multiplicité (séance 3).

Proposition 1.5.3 (Trace et valeurs propres)**.** *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes de A, comptées avec multiplicité, alors*

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \qquad \textit{et} \qquad \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Définition 1.5.8. Une matrice A est **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Les colonnes de P sont alors des vecteurs propres, et les coefficients diagonaux de D les valeurs propres associées.

Propriété 1.5.9.

1. *Une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ possédant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable.*
2. *Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et D^k s'obtient en élevant à la puissance k les coefficients diagonaux.*
3. *Toute matrice **symétrique** réelle ($A^T = A$) est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles (admis).*

Exercice 1.5.5 ($\star\star$ Diagonalisation)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres ; vérifier les relations avec $\operatorname{tr} A$ et $\det A$.
2. Trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre ; en déduire P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.5.6 ($\star\star$ Puissances par le binôme)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $N = A - I_2$.

Calculer N^2, puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 1.5.7 ($\star\star\star$ Rotations : un groupe de matrices)**.** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$. En déduire que $\{R_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ est un groupe pour le produit, et le comparer à $(\mathbb{U}, \times)$ (exercice 1.2.4).
2. Calculer les valeurs propres complexes de R_θ.

1.6 Suites et séries numériques (séance 6)

Les suites et séries apparaissent dans l'étude des algorithmes, des méthodes numériques et des systèmes discrets.

1.6.1 Inégalités et valeur absolue

Proposition 1.6.1. *Pour tous réels x, y, a et $r > 0$:*

1. $|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$ *: « x est à distance moins de r de a » ;*
2. $|xy| = |x||y|$ *et* $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire) ;*
3. *on peut ajouter des inégalités de même sens, et multiplier une inégalité par un nombre* positif *; multiplier par un nombre négatif change le sens.*

1.6.2 Suites convergentes

Définition 1.6.1. Une suite numérique est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, notée $(u_n)_{n\geq 0}$. Elle **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ (noté $u_n \to \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Lecture : pour tout niveau de proximité ε, il existe un rang N à partir duquel la suite reste à distance moins de ε de ℓ. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** (voir l'exercice 1.1.2 pour la négation).

Exemple 1.6.1. La suite $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 : pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Proposition 1.6.2 (admis)**.**

1. *La limite, si elle existe, est unique.*
2. *Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, alors $u_n + v_n \to \ell + \ell'$, $u_n v_n \to \ell\ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $\frac{u_n}{v_n} \to \frac{\ell}{\ell'}$.*
3. ***(Encadrement)*** *Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si v_n et w_n tendent vers la même limite ℓ, alors $u_n \to \ell$.*

Proposition 1.6.3 (Suites géométriques)**.**

— *Si $|q| < 1$, alors $q^n \to 0$.*
— *Si $q > 1$, alors $q^n \to +\infty$.*

La démonstration fait l'objet de l'exercice 1.6.2.

Exercice 1.6.1 ($\star$ Définition de la limite)**.** Soit

$$u_n = \frac{2n + 1}{n + 3}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, trouver un rang N explicite tel que $|u_n - 2| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Exercice 1.6.2 ($\star\star$ Inégalité de Bernoulli et suites géométriques)**.**

1. Montrer par récurrence : $\forall x \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1 + x)^n \geq 1 + nx$.
2. Soit $0 < q < 1$. En écrivant $\frac{1}{q} = 1 + h$ avec $h > 0$, montrer que $q^n \to 0$.
3. Que se passe-t-il pour $-1 < q \leq 0$? pour $q > 1$?

1.6.3 Suites monotones et suites récurrentes

Définition 1.6.2. Une suite est **croissante** (resp. **décroissante**) si $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est **majorée** s'il existe M tel que $u_n \leq M$ pour tout n, **minorée** s'il existe m tel que $u_n \geq m$ pour tout n, et **bornée** si elle est majorée et minorée.

Théorème 1.6.1. *Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.*

Définition 1.6.3. Une suite **récurrente** est une suite définie par son premier terme u_0 et une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour une certaine fonction f.

Proposition 1.6.4. *Si $u_{n+1} = f(u_n)$, si $u_n \to \ell$ et si f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$: la limite est un **point fixe** de f.*

Exemple 1.6.2. Pour $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, une limite éventuelle vérifie $\ell = \frac{1}{2}\ell + 1$, soit $\ell = 2$. Attention : ce calcul ne prouve pas que la suite converge, il dit seulement quelle limite est possible.

Exercice 1.6.3 ($\star$ Monotonie et convergence)**.** Étudier la monotonie, le caractère borné et la convergence des suites

$$u_n = \frac{n}{n+1}, \qquad w_n = \frac{(-1)^n}{n} \ (n \geq 1), \qquad z_n = (-1)^n.$$

Exercice 1.6.4 ($\star\star$ Suite récurrente)**.** Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{2}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2$, puis que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire une formule explicite pour u_n.

1.6.4 Séries numériques

Définition 1.6.4. À une suite (u_n), on associe la suite des **sommes partielles**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On dit que la **série** $\sum u_n$ converge si (S_n) a une limite finie S, appelée **somme** de la série et notée $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Sinon la série diverge.

Théorème 1.6.2 (Série géométrique)**.** *La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration. Pour $|q| < 1$, la proposition 1.1.4 donne $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, et $q^{n+1} \to 0$ (exercice 1.6.2), d'où $S_n \to \frac{1}{1-q}$. Si $|q| \geq 1$, le terme général q^n ne tend pas vers 0, et la propriété suivante montre que la série diverge. □

Exemple 1.6.3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Propriété 1.6.5. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$.*

Démonstration. $u_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$ □

La réciproque est fausse : $u_n \to 0$ n'implique pas que la série converge. Le contre-exemple classique est la **série harmonique** $\sum \frac{1}{n}$ (exercice 1.6.6).

Théorème 1.6.3 (Comparaison)**.** *Si $0 \le u_n \le v_n$ pour tout n et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Par contraposée, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Démonstration. Les sommes partielles de $\sum u_n$ sont croissantes (termes positifs) et majorées par $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$: elles convergent. □

Théorème 1.6.4 (Exponentielle)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

En particulier, $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$

Exercice 1.6.5 (⋆⋆ Séries de référence)**.** Étudier la convergence et, si possible, calculer la somme :

$$\sum_{n\ge 0}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \qquad \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 1.6.6 (⋆⋆⋆ La série harmonique diverge)**.** Soit

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Montrer que $H_{2n} - H_n \ge \frac{1}{2}$ pour tout $n \ge 1$, et en déduire que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 1.6.7 (⋆⋆⋆ Vers la loi géométrique)**.** Soit $0 < q < 1$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$.

1. Montrer que
$$(1-q)T_n = \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n.$$
2. Avec $\frac{1}{q} = 1 + h$ et le binôme, montrer que pour $n \ge 2$
$$(1+h)^n \ge \frac{n(n-1)}{2}h^2,$$
puis que $nq^n \to 0$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$

Spoiler. Au chapitre 2, ce dernier calcul donne l'espérance d'une loi géométrique, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$; la série exponentielle sert pour la loi de Poisson.

Chapitre 2

Théorie des probabilités (12 h)

Les probabilités interviennent dans de nombreux domaines du génie électrique : fiabilité des composants, analyse du bruit, transmission de données, théorie des communications et traitement du signal.

Organisation du chapitre

Le chapitre est organisé en six séances de 2 h de cours-TD intégré. Les exercices sont placés juste après la notion qu'ils travaillent ; les exercices $\star$ se font en classe, les $\star\star$ en classe ou à la maison, les $\star\star\star$ servent d'approfondissement.

Séance	Contenu	Remarques
1	Dénombrement ; expérience aléatoire, univers, événements, algèbre des événements	ensembles et De Morgan déjà vus au chapitre 1
2	Probabilité, probabilité conditionnelle, indépendance, probabilités totales, formule de Bayes	
3	Variables aléatoires : fonction de répartition, espérance, variance ; lois discrètes usuelles	séance la plus dense
4	Variables continues et lois continues usuelles ; fonction caractéristique	la fonction caractéristique (fin de la séance 3 dans le texte) se traite en début de séance 4
5	Couples de variables aléatoires : loi jointe, covariance, loi conditionnelle	les deux exemples longs peuvent servir d'exercices corrigés
6	Inégalités de Markov et de Tchebychev, loi des grands nombres, théorème central limite	prépare les intervalles de confiance du chapitre 3

2.1 Dénombrement et calcul des probabilités (séance 1)

Le dénombrement permet de compter efficacement le nombre de résultats possibles d'une expérience aléatoire.

2.1.1 Principe multiplicatif

Propriété 2.1.1. *Si une expérience se déroule en p étapes successives et que :*

- *la première étape peut être réalisée de n_1 façons ;*
- *la deuxième de n_2 façons ;*
- *...*
- *la dernière de n_p façons ;*

alors le nombre total de possibilités est

$$n_1 n_2 \cdots n_p.$$

Exemple 2.1.1. Un code est constitué de trois lettres suivies de deux chiffres.

Le nombre total de codes possibles est

$$26^3 \times 10^2 = 1\,757\,600.$$

Exercice 2.1.1 ($\star$ Principe multiplicatif)**.**

1. Une plaque d'immatriculation française a le format AB-123-CD (deux lettres, trois chiffres, deux lettres). Combien de plaques peut-on former ?
2. Un octet est un mot binaire de longueur 8. Combien y a-t-il d'octets ?

2.1.2 Arrangements

Définition 2.1.2. Un arrangement c'est une façon de ranger des objets en ordre. On peut voir les arrangements comme une notation en tuple, liste ou mots.

Les deux formules que l'on va trouver pour les arrangements viennent du principe multiplicatif.

Avec répétition Dans ce cadre on peut réutiliser des objets qui sont déjà présents dans la liste : $(3, 2, 2, 1, 3)$ est un arrangement avec répétition pour un total de $n = 3$ objets et de longueur $p = 5$. Pour obtenir d'un univers de n objets le nombre d'arrangement de longueur p on trouve

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$$

Sans répétition Par exemple : $(3, 4, 2, 1, 7)$ est un arrangement pour $n = 10$ et $p = 5$.

Le nombre d'arrangements de p objets parmi n sans répétition est

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p-1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Un cas particulier est quand $p = n$ dans le cadre sans répétition, où l'on retrouve les permutations

Exemple 2.1.2. Choisir puis ordonner trois étudiants parmi huit :

$$A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 336.$$

Exercice 2.1.2 ($\star$ Avec ou sans répétition)**.** Combien y a-t-il de codes PIN à 4 chiffres ? Combien ont leurs 4 chiffres tous distincts ? En déduire la proportion de codes ayant au moins deux chiffres égaux.

Exercice 2.1.3 ($\star$ Mots de passe)**.** Combien de mots de passe de longueur 8 peuvent être formés à partir de lettres majuscules ?

Exercice 2.1.4 ($\star\star$ Codes d'accès)**.** Un code d'accès est constitué de deux lettres majuscules suivies de trois chiffres.

1. Combien de codes peut-on former si les répétitions sont autorisées ?
2. Même question si les deux lettres doivent être distinctes et si les trois chiffres doivent être distincts.
3. Combien de codes contiennent exactement un chiffre égal à 0, dans le cas où les répétitions sont autorisées ?

Exercice 2.1.5 ($\star$ Podium)**.** Parmi 12 candidats, on souhaite attribuer les trois places d'un podium : or, argent et bronze.

1. Combien de podiums différents peut-on former ?
2. Combien de podiums contiennent un candidat donné ?
3. Combien de podiums ne contiennent aucun des deux candidats A et B ?

2.1.3 Permutations

Définition 2.1.3. Une permutation de n objets est un arrangement de ces objets où tous sont présents et une seule fois (ceci code une fonction bijective). Par exemple $\sigma = (2, 1, 3, 5, 4)$ est une permutation pour $n = 5$ où on code le fait que $\sigma(1) = 2$, qui dit que la position 1 est maintenant occupé par le deuxième élément.

Le nombre de permutations possibles sur n éléments est

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n;$$

où on définit $0! = 1$.

Exemple 2.1.3. Le nombre de façons d'ordonner cinq composants distincts est

$$5! = 120.$$

Exercice 2.1.6 ($\star\star$ Rangement de livres)**.** Sept livres tous distincts doivent être rangés sur une étagère.

1. Combien de rangements sont possibles ?
2. Combien de rangements sont possibles si deux ouvrages particuliers doivent être côte à côte ?
3. Combien de rangements sont possibles si ces deux ouvrages ne sont pas côte à côte ?
4. Combien de rangements sont possibles si un ouvrage donné doit être placé en première position ?

2.1.4 Combinaisons

Définition 2.1.4. Une combinaison est une façon de former des groupes de p personnes dans un univers de n personnes. A différence des arrangements, ici on ne s'intéresse pas a un ordre, sinon juste quel éléments sont présents.

Le nombre de combinaisons de p objets parmi n est le coefficient binomial défini par

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemple 2.1.4. Le nombre de groupes de trois personnes choisis parmi huit vaut

$$\binom{8}{3} = 56.$$

Exercice 2.1.7. Montrer les identités suivantes

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$
2. $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.

Un autre exemple utile pour remarquer la différence entre les arrangements et les combinaisons.

— On forme un comité de 3 personnes parmi 5 pour représenter une association → combinaison.
— Maintenant on change a choisir un comité formé par un président, un vice-président et un trésorier → arrangement, car ici les personnes dans le groupe sont distinguables.

Les coefficients binomiaux apparaissent dans le développement de

$$(a+b)^n.$$

Théorème 2.1.1 (Binôme de Newton)**.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exercice 2.1.8 (⋆⋆ Contrôle d'un lot)**.** Un lot contient 20 composants dont 4 sont défectueux. On en prélève 3 au hasard, simultanément.

1. Combien de prélèvements différents sont possibles ?
2. Combien contiennent exactement un composant défectueux ?
3. Combien contiennent au moins un composant défectueux ?

Exercice 2.1.9 (⋆⋆ Octets et coefficients binomiaux)**.** Combien d'octets (mots binaires de longueur 8) contiennent exactement trois bits égaux à 1 ? Au plus un bit égal à 1 ? Vérifier que $\sum_{k=0}^{8} C_8^k = 2^8$.

Exercice 2.1.10 (⋆ Un coefficient binomial)**.** Calculer

$$\binom{10}{4}.$$

Exercice 2.1.11 (⋆⋆ Comités)**.** Une association compte 18 membres et souhaite constituer un comité de 5 personnes.

1. Combien de comités peut-on former ?
2. Combien de comités contiennent une personne donnée ?
3. Combien de comités contiennent deux personnes données ?
4. Combien de comités contiennent exactement 3 femmes, sachant que l'association compte 10 femmes et 8 hommes ?

2.1.5 Enlever les doublons dans le comptage

Si dans l'ensemble de n éléments il y a k différentes mais indistinguables, lorsque on essaie de calculer le nombre d'arrangements différentes a n éléments, il faut enlever les doublons dans le comptage et pour ça on divise par $k!$ les permutations possibles entre les k éléments. On verra ça dans un exemple.

Exemple 2.1.5. Combien de mots on peut former en utilisant toutes les lettres du mot *probable*. On commence notre analyse en considérant que les 8 lettres sont différentes en prenant $p, r, o, b_1, a, b_2, l, e$, puis comme b_1 et b_2 apparaissent dans tous les mots comptés et on ne veut pas faire de distinction entre b_1 et b_2 (enlever les sous indices), on va diviser par le nombre de permutations entre b_1 et b_2. Ceci donne un total de

$$\frac{8!}{2!}$$

Exercice 2.1.12. Combien de mots on peut faire en utilisant toutes les lettres du mot *probabilities*.

Exercice 2.1.13 (⋆⋆ Chemins dans une grille)**.** Sur un quadrillage, on va du point $(0, 0)$ au point $(5, 3)$ en faisant uniquement des pas d'une unité vers la droite (D) ou vers le haut (H). Combien y a-t-il de chemins ?

Exercice 2.1.14 (⋆⋆ Anagrammes)**.** On considère les anagrammes du mot

`STATISTIQUE`.

1. Combien de lettres comporte ce mot ?
2. Relever les lettres répétées et leurs multiplicités.
3. Combien d'anagrammes distincts peut-on former ?
4. Combien d'anagrammes distincts commencent par la lettre `S` ?

2.2 Probabilités

Définition 2.2.1. Une expérience est dite aléatoire lorsque son résultat ne peut être prévu avec certitude avant sa réalisation.

Exemple 2.2.1.

— lancer un dé ;
— mesurer le bruit thermique d'un circuit ;
— observer une défaillance électronique.

Définition 2.2.2. L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé univers et est noté Ω.

Exemple 2.2.2. Pour un lancer de dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 2.2.3. Un événement est une partie (sous-ensemble) de l'univers.

Exemple 2.2.3. L'événement $A = \{2, 4, 6\}$ correspond à « obtenir un nombre pair » d'un lancer de dés.

L'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble A est dénoté par $\mathcal{P}(A)$.

Lorsque $|\Omega| = n < \infty$ la quantité $|\mathcal{P}(\Omega)|$ des sous ensembles de Ω est égale à la somme de tous les sous-ensembles de taille p pour $p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, par suite

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = (1+1)^n = 2^n$$

Définition 2.2.4. On appelle tribu sur Ω ou σ-algèbre un $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ qui satisfait
- $\emptyset \in \Sigma$,
- Si $A \in \Sigma$, alors $\Omega \setminus A \in \Sigma$,
- Si $(A_i : i \in \mathbb{N})$ avec $A_i \in \Sigma$, alors $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma$.

Exemple 2.2.4. Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, alors $\Sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ est une σ-algèbre.

Définition 2.2.5. Un espace Ω muni d'une σ-algèbre Σ est dit probabilisable (car il manque un probabilité encore).

En générale lorsque Ω est dénombrable (fini ou infini) on utilisera $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$. Quand l'espace n'est pas dénombrable, c'est bien plus délicat.

Le message a retenir est : une σ-algèbre consiste exactement aux événements ou je vais pouvoir demander quelle sera la probabilité autrement dit les questions que l'on va pouvoir répondre avec une probabilité.

On fait une synthèse des opérations sur les ensembles (événements dans le contexte des probabilités)

Notation	Terminologie ensembliste	Terminologie probabiliste
ω	Élément	Réalisation (issue)
$\{\omega\}$	Singleton	Événement élémentaire
A^c ou $\overline{A}$	Complémentaire de A	Événement contraire de A
$\varnothing$	Ensemble vide	Événement impossible
Ω	Ensemble universel	Univers (événement certain)
$A \cup B$	Union	Événement « A ou B »
$A \cap B$	Intersection	Événement « A et B »
$A \cap B = \varnothing$	Ensembles disjoints	Événements incompatibles
$A \cap B$	Intersection	Événement « A et B »
$A \cap B = \varnothing$	Ensembles disjoints	Événements incompatibles
$A \subseteq B$	Sous-ensemble	Si A se réalise alors B se réalise

Notation	Terminologie ensembliste	Terminologie probabiliste
$\omega \in A$	Appartenance	La réalisation ω appartient à l'événement A
$A = B$	Égalité d'ensembles	Événements identiques
$A \triangle B$	Différence symétrique	Événement « A ou B, mais pas les deux »

Propriété 2.2.6 (Algèbre des événements)**.** *Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω.*

1. ***Commutativité***

$$A \cup B = B \cup A \quad et \quad A \cap B = B \cap A.$$

2. ***Associativité***

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad et \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. ***Distributivité***

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad et \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. ***Idempotence***

$$A \cup A = A \quad et \quad A \cap A = A.$$

5. ***Absorption***

$$A \cup (A \cap B) = A \quad et \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

6. ***Éléments neutres***

$$A \cup \varnothing = A \quad et \quad A \cap \Omega = A.$$

7. ***Éléments absorbants***

$$A \cup \Omega = \Omega \quad et \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

8. ***Complémentaire***

$$A \cup A^c = \Omega \quad et \quad A \cap A^c = \varnothing,$$

$$(A^c)^c = A.$$

9. ***Lois de De Morgan***

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad et \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

2.2.1 Probabilité (séance 2)

Définition 2.2.7. Une probabilité est une application $P : \Sigma \to [0, 1]$ vérifiant :

1. $P(\Omega) = 1$;
2. $P(A) \geq 0$;
3. si $A \cap B = \varnothing$, alors
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Définition 2.2.8. Un espace Ω muni d'une σ-algèbre Σ et d'une probabilité sur Σ est dit espace probabilisé.

Exemple 2.2.5. L'un des espaces probabilisés le plus simple a travailler est l'espace équiprobable, qui est valide dans le cadre $|\Omega| = n$ et on utilise $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ avec

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n}$$

.

Exercice 2.2.1. Montrer que la probabilité d¡un espace équiprobable est bien une probabilité à partir de la définition. Qu'est-ce qui se passe lorsque $|\Omega| = \infty$?

Exemple 2.2.6. Un lacer de dé non pipé est dans les espaces équiprobables avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ou par exemple $A = \{\text{tirer un nombre pair}\} = \{2, 4, 6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

À partir des axiomes de la probabilité, on peut démontrer un certain nombre de propriétés fondamentales, très utiles dans les calculs.

Propriété 2.2.9. *Soient A et B deux événements d'un univers Ω.*

1. ***Probabilité du complémentaire***

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

2. ***Monotonie*** *Si $A \subseteq B$, alors*

$$P(A) \leq P(B).$$

3. ***Différence de deux événements***

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

4. ***Formule de la réunion***

   Pour tous événements A et B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemple 2.2.7. Soient deux événements tels que

$$P(A) = 0.6, \qquad P(B) = 0.5, \qquad P(A \cap B) = 0.2.$$

Alors

$$P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.2 = 0.9.$$

De plus,

$$P(A^c) = 1 - 0.6 = 0.4.$$

Exercice 2.2.2 ($\star$ Calculs avec les propriétés)**.** Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A^c \cap B)$ et $P(A^c \cap B^c)$.

Exercice 2.2.3 ($\star\star$ Le paradoxe des anniversaires)**.** On considère n personnes dont les dates d'anniversaire sont indépendantes et uniformes sur 365 jours.

1. Montrer que la probabilité que les n dates soient toutes distinctes vaut $\frac{A_{365}^n}{365^n}$.
2. En déduire la probabilité qu'au moins deux personnes aient la même date. On admet qu'elle vaut environ 0,507 pour $n = 23$: commenter.

Exercice 2.2.4 ($\star$ Somme de deux dés)**.** On lance deux dés équilibrés. Calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 7.

Exercice 2.2.5 ($\star$ Somme de deux dés (suite))**.** On lance deux dés équilibrés à six faces. On note S la somme des nombres obtenus.

1. Décrire l'univers des issues et donner son cardinal.
2. Calculer la probabilité des événements :

$$A = \{S = 7\}, \qquad B = \{S \geq 10\}, \qquad C = \{S \text{ est pair}\}.$$

3. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap C)$.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6.

2.2.2 Probabilité conditionnelle

Définition 2.2.10. Soit un événement B tel que $P(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exercice 2.2.6. La probabilité conditionnelle est une probabilité.

Exemple 2.2.8 (Probabilité conditionnelle)**.** Une urne contient 10 boules :

— 6 boules rouges ;
— 4 boules bleues.

Parmi les boules rouges, 2 sont numérotées 1, et parmi les boules bleues, 1 est numérotée 1.

On tire une boule au hasard.

On considère les événements

$$R = \text{« la boule est rouge »} \qquad \text{et} \qquad N = \text{« la boule porte le numéro 1 »}.$$

On a

$$P(R) = \frac{6}{10} \qquad \text{et} \qquad P(N) = \frac{3}{10}.$$

Supposons maintenant que l'on sache que la boule tirée porte le numéro 1. L'univers est alors réduit aux trois boules numérotées 1, dont deux sont rouges.

La probabilité que la boule soit rouge sachant qu'elle porte le numéro 1 est donc

$$P(R|N) = \frac{2}{3}.$$

Retrouvons ce résultat avec la définition :

$$P(R|N) = \frac{P(R \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, l'information « la boule est numérotée 1 » modifie la probabilité qu'elle soit rouge : on passe de

$$P(R) = \frac{3}{5} \quad \text{à} \quad P(R|N) = \frac{2}{3}.$$

Exercice 2.2.7 ($\star$ Tirages sans remise)**.** On tire successivement et sans remise deux cartes d'un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité que la deuxième carte soit un as sachant que la première en est un ?
2. En utilisant $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1)$, calculer la probabilité de tirer deux as.

Exercice 2.2.8 ($\star$ Cartes et probabilité conditionnelle)**.** Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte au hasard. On note

$$A = \{\text{la carte tirée est un As}\}, \qquad C = \{\text{la carte tirée est un cœur}\}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap C)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(A \mid C)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(C \mid A)$.
4. Interpréter les deux probabilités conditionnelles obtenues.

2.2.3 Indépendance

Définition 2.2.11. Deux événements A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemple 2.2.9 (Indépendance de deux événements)**.** On lance deux fois une pièce équilibrée. On définit les événements :

$A =$ « obtenir pile au premier lancer » et $B =$ « obtenir pile au deuxième lancer ».

L'univers est

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\},$$

où la première lettre correspond au premier lancer et la seconde au deuxième lancer.

On a

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

De même $P(B) = \frac{1}{2}$.

L'événement simultané est

$$A \cap B = \{PP\} \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}.$$

On vérifie

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

d'où les événements A et B sont indépendants.

Considérons maintenant les événements :

$$E = \text{« obtenir deux piles »} \quad \text{et} \quad F = \text{« obtenir au moins un pile »}.$$

On a

$$E = \{PP\}, \quad F = \{PP, PF, FP\} \quad \text{et} \quad E \cap F = \{PP\} = E,$$

donc

$$P(E) = \frac{1}{4}, \qquad P(F) = \frac{3}{4} \text{ et } \quad P(E \cap F) = \frac{1}{4}.$$

Mais on a qu'ils sont dépendants car

$$P(E \cap F) = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = P(E)P(F).$$

Remarque. Deux événements indépendants ne sont généralement pas incompatibles (disjoints).

En effet, si deux événements A et B sont incompatibles (i.e. $A \cap B = \varnothing$), alors $P(A \cap B) = 0$.

S'ils étaient également indépendants, il faudrait avoir $P(A)P(B) = 0$, ce qui implique que l'un des deux événements ait une probabilité nulle.

Ainsi, deux événements de probabilité non nulle ne peuvent pas être à la fois indépendants et incompatibles.

Exercice 2.2.9 (⋆⋆ Indépendance et complémentaire)**.** Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants, ainsi que A^c et B^c.

Exercice 2.2.10 (⋆⋆ Fiabilité d'un système)**.** Trois composants fonctionnent indépendamment, chacun avec probabilité 0,9.

1. Les composants sont montés en série : le système fonctionne si les trois fonctionnent. Calculer la probabilité que le système fonctionne.
2. Ils sont montés en parallèle : le système fonctionne si au moins un composant fonctionne. Même question.

Exercice 2.2.11 (⋆⋆ Indépendance avec deux dés)**.** On lance deux dés équilibrés. On considère les événements

$$A = \{\text{la somme est paire}\}, \qquad B = \{\text{le premier dé donne un nombre pair}\},$$

et

$$C = \{\text{la somme vaut } 7\}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Les événements B et C sont-ils indépendants ?
4. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

2.2.4 Formule des probabilités totales

Théorème 2.2.1. *Soit $(B_i)_{i=1,\dots}$ une partition de l'univers ; i.e. $\cup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \Omega$ et $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ (décomposition de l'univers en morceaux qui ne se touchent pas). Alors*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Exemple 2.2.10 (Probabilités totales : contrôle qualité d'un composant électronique)**.** Une entreprise fabrique des composants électroniques dans deux usines différentes.

— L'usine A produit 60% des composants ;
— l'usine B produit 40% des composants.

On sait que :

— 2% des composants fabriqués par l'usine A sont défectueux ;
— 5% des composants fabriqués par l'usine B sont défectueux.

On utilisera la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité qu'un composant soit défectueux.

On note :

$$D = \text{« le composant est défectueux »},$$
$$A = \text{« le composant provient de l'usine } A \text{ »},$$
$$B = \text{« le composant provient de l'usine } B \text{ »}.$$

Les événements A et B forment une partition de l'univers, car $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$.

On cherche la probabilité qu'un composant choisi au hasard soit défectueux.

Comme l'origine du composant peut être soit l'usine A, soit l'usine B, on utilise la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B).$$

En remplaçant par les valeurs données :

$$P(D) = 0.02 \times 0.60 + 0.05 \times 0.40 = 0.032.$$

2.2.5 Formule de Bayes

Théorème 2.2.2. *Pour tout événement B vérifiant $P(B) > 0$, on a*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Exemple 2.2.11. On continue l'exemple précédent pour découvrir maintenant la probabilité qu'un composant vienne de l'usine A, sachant qu'il est défectueux, on cherche donc $P(A|D)$.

D'après la formule de Bayes,

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}.$$

Or, d'après l'exemple précédent, $P(D) = 0.032$. On obtient donc :

$$P(A|D) = \frac{0.02 \times 0.60}{0.032} = \frac{0.012}{0.032} = 0.375.$$

Exercice 2.2.12 ($\star\star$ Canal de transmission binaire)**.** Un émetteur envoie le bit 1 avec probabilité 0,4 et le bit 0 avec probabilité 0,6. Le canal transmet chaque bit correctement avec probabilité 0,9 et l'inverse avec probabilité 0,1.

1. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 ?
2. On reçoit un 1. Quelle est la probabilité que le bit émis soit un 1 ?

Exercice 2.2.13 ($\star\star$ Test de dépistage)**.** Une maladie touche 1 % de la population. Un test est positif chez 95 % des personnes malades et négatif chez 90 % des personnes non malades.

1. Construire un arbre de probabilités.
2. Calculer la probabilité qu'un individu choisi au hasard ait un test positif.
3. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit effectivement malade.
4. Commenter le résultat.

Exercice 2.2.14 ($\star\star\star$ Le problème de Monty Hall)**.** Un jeu télévisé propose le jeu suivant :

Trois portes sont présentées au candidat : P_1, P_2, P_3. Derrière l'une des trois portes se trouve un prix , tandis que derrière les deux autres se trouvent des lots sans valeur.

Le candidat choisit initialement une porte, sans l'ouvrir. Le présentateur, qui connaît l'emplacement du prix, ouvre alors obligatoirement une des deux autres portes derrière laquelle il sait qu'il n'y a pas de prix.

Le candidat a ensuite le choix de conserver sa porte initiale ou de changer de porte et choisir l'unique autre porte encore fermée.

On cherche à déterminer la stratégie qui maximise la probabilité de gagner.

1. Le candidat choisit initialement la porte P_1. Calculer la probabilité que le prix soit derrière la porte P_1. En déduire la probabilité que le prix soit derrière l'une des deux autres portes.
2. On suppose que le prix est effectivement derrière P_1. Que se passe-t-il lorsque le présentateur ouvre une porte parmiP_2 et P_3 ? Calculer la probabilité de gagner en conservant son choix initial.
3. On suppose maintenant que le prix n'est pas derrière P_1. Le présentateur ouvre alors nécessairement la seule porte perdante parmi P_2 et P_3. Montrer que dans ce cas, changer de porte permet de gagner.
4. Calculer finalement la probabilité de gagner :
   (a) en conservant la porte initiale ;
   (b) en changeant de porte.

   Quelle stratégie doit choisir le candidat ?
5. (interprétation probabiliste). On note :

   $C =$ « le candidat conserve son choix initial », et $G =$ « le candidat gagne ».

   Expliquer pourquoi l'information donnée par le présentateur modifie la probabilité conditionnelle $P(G|C)$. Pourquoi le fait que le présentateur connaisse l'emplacement du prix est essentiel dans ce problème ?

2.3 Variables aléatoires (séance 3)

Définition 2.3.1. Une variable aléatoire est une application mesurable

$$X : (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(R)).$$

C'est à dire pour tout ensemble si $A \in \mathcal{B}(R)$, alors $X^{-1}(A) \in \Sigma$.

La mesurabilité permet de poser des questions sur $\mathbb{R}$ et les répondre sur Ω. Formellement, l'événement

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$$

cette représentation est fondamentale en probabilités.

On va s'intéresser à la caractérisation d'une variable aléatoire dans un espace probabilisé (Ω, Σ, P) cette caractérisation s'appelle loi d'une variable aléatoire. La loi d'une variable aléatoire est la réponse a tous les valeurs $P(X \in A)$ for $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note la loi d'une variable aléatoire par P_X.

2.3.1 Fonction de répartition

Définition 2.3.2. La fonction de répartition est définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lecture : probabilité cumulée pour les éléments inférieurs à x.

Propriété 2.3.3. *La fonction de répartition est :*

- *croissante ;*
- *continue à droite ;*
- *vérifie*

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0,$$
$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

La fonction de répartition caractérise la loi, i.e. si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition, alors elles ont la même loi. Ça vient du fait que les intervalles du type $]-\infty, x]$ pour $x \in \mathbb{R}$ génèrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Définition 2.3.4. Une variable aléatoire est dite *discrète* si la fonction de répartition est constante par morceaux (fonction en échelle) avec un nombre au plus dénombrable de marches. De façon équivalente, si jamais les valeurs possibles de la variable aléatoire est au plus dénombrable. Elle est dite *continue* (plus formellement à densité ou absolument continue), si sa fonction de répartition est continue et de classe C^1 par morceaux (dérivable et de dérivée continue).

Définition 2.3.5. Soit X une variable aléatoire. On appelle support d'une variable aléatoire $\text{Supp}(X)$ à l'ensemble des valeurs possibles de X.

Proposition 2.3.1. *Si X est une variable aléatoire discrète ($Supp(X)$ est dénombrable), sa loi est caractérisé par $P(X = x)$ pour tout $x \in Supp(X)$.*

Si X est une variable aléatoire continue sa loi est déterminée par sa densité, qui est non-nulle dans $Supp(X)$.

Exercice 2.3.1 ($\star$ Reconnaître une fonction de répartition)**.** Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions de répartition ? (Chacune vaut 0 avant l'intervalle indiqué.)

$$F_1(x) = 1 - e^{-x} \text{ pour } x \geq 0; \qquad F_2(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}; \qquad F_3(x) = \sin x \text{ pour } x \geq 0.$$

Exercice 2.3.2 ($\star$ Fonction de répartition d'une loi discrète)**.** Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

x	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	0,1	0,3	0,4	0,2

1. Déterminer la fonction de répartition
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$
2. Représenter graphiquement F_X.
3. Calculer
$$\mathbb{P}(X < 1), \qquad \mathbb{P}(0 \leq X \leq 2), \qquad \mathbb{P}(X > 0).$$

2.3.2 Espérance

Définition 2.3.6. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $E(|X|) < +\infty$. L'*espérance* de X est définie par

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP_X(\omega).$$

L'espérance possède des propriétés algébriques qui en font un outil fondamental en probabilités.

Propriété 2.3.7. *Soient X et Y deux variables aléatoires intégrables et $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. ***Espérance d'une constante*** *Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, $E(c) = c$.*
2. ***Linéarité*** *$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.*
3. ***Positivité*** *Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.*
4. ***Monotonie*** *Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.*
5. ***Encadrement*** *Si $a \leq X \leq b$, alors $a \leq E(X) \leq b$.*
6. ***Produit de variables indépendantes*** *Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

Exemple 2.3.1. Soient X et Y deux variables aleatoires tel que $E(X) = 3$, $E(Y) = 5$. Calculons $E(2X - Y + 4)$.

Par linéarité,

$$E(2X - Y + 4) = 2E(X) - E(Y) + 4. = 2 \times 3 - 5 + 4 = 5.$$

De plus, si l'on ajoute qu'elles sont indépendantes, on peut calculer

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 3 \times 5 = 15.$$

Théorème 2.3.1 (Lemme de transfert)**.** *Soit X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $E(|g(X)|) < +\infty$. Alors l'espérance de $g(X)$ se calcule directement à partir de la loi de X, sans déterminer la loi de $g(X)$, comme suit*

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X(\omega)) dP_X(\omega)$$

Définition 2.3.8. La variance est

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

La variance mesure la dispersion d'une variable aléatoire autour de son espérance.

Propriété 2.3.9. *Soient X et Y deux variables aléatoires de variance finie et $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. ***Variance d'une constante*** *Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, on a $V(c) = 0$.*
2. ***Expression de la variance*** *elle peut aussi s'écrire sur la forme*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Cette formule est souvent la plus simple pour effectuer les calculs.

3. ***constantes et facteurs***

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

4. ***Variance d'une somme indépendante***

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

La preuve de toutes les propriétés précédentes découlent des propriétés de l'espérance et est laissé comme exercice.

Définition 2.3.10. L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exercice 2.3.3 (⋆⋆ Propriétés de la variance)**.** À partir des propriétés de l'espérance, démontrer que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et que $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Exercice 2.3.4 (⋆⋆ Un jeu de dé)**.** Un jeu consiste à lancer un dé équilibré. Le joueur gagne :

Résultat du dé	1	2	3	4	5	6
Gain (euros)	−2	−1	0	1	2	8

On note G le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de G.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(G)$.
3. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Quel prix maximal le joueur peut-il payer pour participer à ce jeu sans que celui-ci lui soit défavorable en moyenne ?

2.3.3 Fonction caractéristique

Définition 2.3.11. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire est

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}).$$

Propriété 2.3.12. *Si le moment d'ordre n de X existe, alors la fonction caractéristique est n fois dérivable en 0 et*

$$\varphi_X^{(n)}(0) = i^n E(X^n).$$

Ainsi,

$$E(X^n) = \frac{\varphi_X^{(n)}(0)}{i^n}$$

La fonction caractéristique permet de caractériser la loi (elle est toujours bien définie car $E(|e^{itX}|) = E(1) = 1$. C'est assez pratique de travailler avec elle et on peut récupérer pleins d'observables d'une loi à partir des calculs élémentaires.

Exercice 2.3.5 (⋆⋆ Fonction caractéristique d'une variable à deux valeurs)**.** Soit X telle que $P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$. Calculer $\varphi_X(t)$, puis en déduire $E(X)$ et $E(X^2)$.

Exercice 2.3.6 (⋆⋆ Fonction caractéristique d'une Bernoulli)**.** Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.

1. Rappeler les valeurs possibles de X et leurs probabilités.

2. Montrer que sa fonction caractéristique est

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right] = 1 - p + p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

3. Vérifier que $\varphi_X(0) = 1$.
4. Calculer $\varphi_X(\pi)$.
5. Retrouver l'espérance de X à partir de

$$\varphi'_X(0) = \mathrm{i}\mathbb{E}(X).$$

2.4 Variables aleatoires discrètes

Dans le cadre discret, l'esperance prend la forme

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP_X(\omega) = \sum_{k \in \mathrm{Supp}(X)} kP(X = k);$$

et dans sa forme la plus générale : le lemme de transfert se récrit

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X(\omega)) dP_X(\omega) = \sum_{k \in \mathrm{Supp}(X)} g(k)P(X = k);$$

On commence avec quelques exemples de calcul

Exemple 2.4.1 (Calcul d'un moment d'ordre 2)**.** On lance un dé équilibré à six faces et l'on note X le numéro obtenu. La loi de X est déterminée par

$$P(X = k) = \frac{1}{6}, \qquad k = 1, \ldots, 6.$$

Calculons La variance de X. Calculons d'abord $E(X^2)$. D'après le lemme de transfert, en prenant $g(x) = x^2$ on obtient

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X = k).$$

Ainsi,

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\right) = \frac{91}{6}$$

Maintenant calculons l'espérance de X

$$E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{7}{2}.$$

On retrouve finalement la variance à l'aide de la formule :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Exercice 2.4.1 (⋆ Trois lancers de pièce)**.** On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de Pile. Donner la loi de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2.4.2 (⋆⋆ Maximum de deux dés)**.** On lance deux dés équilibrés à six faces. On note X le plus grand des deux résultats obtenus.

1. Déterminer les valeurs possibles de X.
2. Calculer, pour tout $k \in \{1, \dots, 6\}$,

$$\mathbb{P}(X \leq k).$$

3. En déduire la loi de X.
4. Calculer la probabilité que X soit strictement supérieur à 4.

2.4.1 Lois discrètes usuelles

2.4.2 Loi de Bernoulli

Définition 2.4.1. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (noté $X \sim \mathcal{B}(p)$) si $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

Utilisation : Expérience binaire. Par exemple : un tirage d'une pièce de monnaie, une pièce défectueuse une pas.

Exercice 2.4.3. Montrer en utilisant les définitions que si $X \sim B(p)$, alors

$$E(X) = p, \qquad V(X) = p(1 - p).$$

Exercice 2.4.4 (⋆ Bernoulli de paramètre 0,3)**.** Une variable suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.3$. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2.4.5 (⋆ Une pièce biaisée)**.** Une pièce donne Pile avec une probabilité $p = 0{,}6$. On effectue un lancer et on définit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si le résultat est Pile,} \\ 0 & \text{si le résultat est Face.} \end{cases}$$

1. Identifier la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Calculer

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X < 1).$$

2.4.3 Loi binomiale

Définition 2.4.2. Une variable suit une loi binomiale de paramètres n et p (noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$) lorsque

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Utilisation : Combien de n expériences indépendantes un succès (chaque succès avec probabilité p). Par exemple : n tirage d'une pièce de monnaie, le nombre des faces suit une Binomiale. La quantité de pièces défectueuses dans un lot de n pièces où chaque pièce a probabilité p d'être défectueuse.

Exercice 2.4.6. Montrer en utilisant les définitions que si $X \sim B(n,p)$, alors

$$E(X) = np, \qquad V(X) = np(1-p).$$

Exercice 2.4.7 ($\star$ Une probabilité binomiale)**.** Soit $X \sim \mathcal{B}(10, 0.2)$, calculer $P(X = 2)$.

Exercice 2.4.8 ($\star\star$ QCM au hasard)**.** Un étudiant répond au hasard à 15 questions indépendantes d'un QCM comportant quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. On note X le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il obtienne exactement 5 bonnes réponses.
3. Calculer la probabilité qu'il obtienne au moins 10 bonnes réponses.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.
5. Donner une approximation de $\mathbb{P}(X \geq 10)$ à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.

2.4.4 Loi géométrique

Définition 2.4.3. Une variable aléatoire suit une loi géométrique de paramètre p (noté $X \sim \mathcal{G}(p)$) lorsque

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k \geq 1.$$

Utilisation : Expérience qui compte la quantité d'étapes nécessaires jusqu'à avoir un succès (chaque étape avec probabilité p d'avoir un lancé indépendamment des étapes précédentes). La quantité de lancers d'une pièce de monnaie jusqu'à tirer une face suit une loi géométrique où le paramètre est la probabilité de tirer face.

Proposition 2.4.1. *L'espérance et la variance d'une variable aléatoire Géométrique de paramètre p sont*

$$E(X) = \frac{1}{p}, \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Ici le calcul utilise une astuce, c'est pour ça que l'on accepte le résultat.

Exercice 2.4.9. La loi Géométrique possède la propriété d'absence de mémoire

$$P(X > s+t | X > s) = P(X > t).$$

Exercice 2.4.10 ($\star\star$ Démarrage d'une machine)**.** Une machine démarre correctement avec une probabilité $p = 0{,}9$ à chaque tentative, les tentatives étant indépendantes. On note X le rang de la première tentative réussie.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer
$$\mathbb{P}(X = 1), \qquad \mathbb{P}(X = 3), \qquad \mathbb{P}(X > 3).$$
3. Calculer $\mathbb{P}(X > 5 \mid X > 2)$.

4. Retrouver la propriété d'absence de mémoire :

$$\mathbb{P}(X > m + n \mid X > m) = \mathbb{P}(X > n).$$

5. Calculer l'espérance de X.

2.4.5 Loi de Poisson

Définition 2.4.4. Une variable suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (noté $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Proposition 2.4.2. *En utilisant la série exponentielle. Montrer que si $\mathcal{P}(\lambda)$, alors*

$$E(X) = \lambda, \qquad V(X) = \lambda.$$

Exercice 2.4.11 (⋆⋆ Espérance et variance de la loi de Poisson)**.** Démontrer la proposition précédente à l'aide de la série $e^{\lambda} = \sum_{j\geq 0} \frac{\lambda^j}{j!}$. On pourra calculer $E\big(X(X-1)\big)$.

Exercice 2.4.12 (⋆⋆ Approximation d'une binomiale par une loi de Poisson)**.** Une machine produit 1 000 pièces ; chacune est défectueuse avec probabilité 0,002, indépendamment des autres. On note X le nombre de pièces défectueuses.

1. Donner la loi de X, son espérance, et la valeur exacte de $P(X = 0)$.
2. Comparer avec $P(Y = 0)$ pour $Y \sim \mathcal{P}(2)$.

Utilisation : Expérience qui mesure la quantité d'éléments présents dans une unité. Par exemple : la quantité des pannes dans une heure, la quantité d'étoiles dans un Km^2. L'idée est que le paramètre est la moyenne, ainsi que la variance.

Dans la vie réelle un astronome prends des images avec un satellite, qui est cher à utiliser. Du coup, pour étudier le nombre d'étoiles par exemple, ce qu'il va faire est de prendre 50 images qui couvrent la même surface (disons Km^2) et il va compter en moyenne combien d'étoiles il y a dans un Km^2 pour avoir $\hat{\lambda}$ une estimation de λ. Pour ensuite faire des simulations à l'aide d'une variable aléatoire $\mathcal{P}(\hat{\lambda})$.

Exercice 2.4.13 (⋆ Une probabilité de Poisson)**.** Pour $X \sim \mathcal{P}(3)$, calculer $P(X = 0)$.

Exercice 2.4.14 (⋆⋆ Standard téléphonique)**.** Le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique en une heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.

1. Calculer la probabilité de ne recevoir aucun appel en une heure.
2. Calculer la probabilité de recevoir exactement 3 appels.
3. Calculer la probabilité de recevoir au plus 2 appels.
4. Calculer l'espérance et la variance du nombre d'appels.
5. En supposant que les appels suivent le même modèle, quel est le paramètre de la loi donnant le nombre d'appels reçus en une demi-heure ?

Exercice 2.4.15 (⋆ Choisir la bonne loi)**.** Identifier la loi la plus adaptée dans chacune des situations suivantes, en précisant son ou ses paramètres.

1. Le nombre de clients arrivant dans un magasin en une heure.
2. Le nombre de réponses correctes à un QCM de 20 questions, chaque question ayant une probabilité 0,7 d'être réussie indépendamment des autres.

3. Le nombre d'essais nécessaires avant d'obtenir le premier succès, chaque essai ayant une probabilité 0,2 de succès.
4. Le résultat d'un test, codé par 1 en cas de succès et 0 sinon, sachant que la probabilité de succès est 0,8.

2.5 Variables aléatoires continues (séance 4)

On a définit les variables aleatoires continues comme les variables aleatoires qui ont une fonction de répartition continue et dérivables par morceaux avec dérivée continue. La suivante est la définition la plus générale.

Définition 2.5.1. Une variable aléatoire réelle X est dite *continue* s'il existe une fonction positive $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

pour tous $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

La fonction f_X est appelée *densité de probabilité* de X.

Propriété 2.5.2. *Une densité vérifie*
— $f_X(x) \geq 0$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
— $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

Exemple 2.5.1. La fonction suivante est une densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété 2.5.3. *Pour une variable continue, lorsque* F_X *est dérivable on a*

$$F'_X(x) = f_X(x)$$

Dans le cadre d'une variable aléatoire continue l'espérance prend la forme

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\,dP_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx,$$

et dans sa forme la plus générale : le lemme de transfert se récrit

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X(\omega))dP_X(\omega) = \int_{\text{Supp}(X)} x f_X(x)\,dx;$$

Un exemple d'utilisation sur les calculs d'une variable aleatoire continue

Exemple 2.5.2. Soit X une variable aléatoire continue représentant une mesure aléatoire comprise entre 0 et 5 de fonction de répartition donné par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x}{5}, & 0 \leq x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Notre objectif est de calculer la variance associée à cette variable aléatoire. Comme la fonction de répartition est continue, dérivable par morceaux avec dérivée continue on peut obtenir la densité est obtenue en dérivant la fonction de répartition $f_X(x) = F'_X(x)$. On obtient donc

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 0 < x < 5, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant que l'on a la fonction de densité, on peut calculer l'espérance pour une variable continue

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^5 \frac{x}{5}\, dx = \frac{1}{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{1}{5} \times \frac{25}{2}. = \frac{5}{2}.$$

La moyenne est donc le centre de l'intervalle $[0, 5]$.

Pour calculer la variance on aura besoin de $E(X^2)$. On utilise le lemme de transfert avec $g(x) = x^2$. Alors

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^5 \frac{x^2}{5}\, dx. = \frac{1}{5}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5. = \frac{1}{5} \times \frac{125}{3}, = \frac{25}{3}$$

Finalement, on calcule la variance

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2. = \frac{25}{3} - \left(\frac{5}{2}\right)^2. = \frac{25}{3} - \frac{25}{4}. = \frac{100 - 75}{12}. = \frac{25}{12}.$$

Exercice 2.5.1 ($\star$ Une densité affine)**.** Soit $f(x) = c\,x$ pour $x \in [0, 2]$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Déterminer c pour que f soit une densité.
2. Déterminer la fonction de répartition, puis $P(X \leq 1)$ et $E(X)$.

Exercice 2.5.2 ($\star\star$ Densité polynomiale)**.** Soit X une variable aléatoire admettant la densité

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1 - x^2), & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante c pour que f_X soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Calculer
$$\mathbb{P}(X \leq 0), \qquad \mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right).$$
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2.6 Lois continues usuelles

2.6.1 Loi uniforme

Définition 2.6.1. Une variable aléatoire suit une loi uniforme sur $[a, b]$ (noté $X \sim \mathcal{U}([a, b])$) si

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x).$$

Exercice 2.6.1. Montrer que si $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exercice 2.6.2 ($\star$ Densité d'une loi uniforme)**.** Vérifier qu'une loi uniforme sur $[0,2]$ possède une densité de probabilité.

Exercice 2.6.3 ($\star$ Attente d'un bus)**.** Le temps d'arrivée d'un bus est supposé uniforme entre 0 et 20 minutes. On note X le temps d'attente d'un voyageur, en minutes.

1. Donner la loi de X et sa densité.
2. Calculer
$$\mathbb{P}(X \leq 5), \qquad \mathbb{P}(5 \leq X \leq 12), \qquad \mathbb{P}(X > 15).$$
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

2.6.2 Loi exponentielle

Définition 2.6.2. Une variable suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (noté $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$) si

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

Exercice 2.6.4. Montrer que si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 2.6.5 ($\star\star$ Absence de mémoire de la loi exponentielle)**.** Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Calculer $P(X > t)$ pour $t \geq 0$, puis démontrer la propriété d'absence de mémoire énoncée ci-dessous.

Propriété Tout comme la loi Géométrique, la loi exponentielle possède la propriété d'absence de mémoire :

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t).$$

Remarque. C'est plus fort que ce que l'on pense. Mais si une variable aléatoire a la propriété d'absence de mémoire, alors elle est Exponentielle ou Géométrique

Exercice 2.6.6 ($\star$ Exponentielle de paramètre 2)**.** Calculer l'espérance et la variance d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

Exercice 2.6.7 ($\star\star$ Durée de vie d'un composant)**.** La durée de vie, en années, d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$. On note cette durée X.

1. Donner la densité et la fonction de répartition de X.
2. Calculer la probabilité que le composant fonctionne encore après 5 ans.
3. Calculer la probabilité que sa durée de vie soit comprise entre 2 et 6 ans.
4. Calculer l'espérance de X.
5. Calculer
$$\mathbb{P}(X > 10 \mid X > 5).$$
Interpréter ce résultat à l'aide de la propriété d'absence de mémoire.

Variable centrée réduite Si une variable X a moyenne μ et variance σ^2, alors la variable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Est une variable de moyenne 0 (centrée) est de variance 1 (réduite), ce qui est appelé une variable aléatoire centrée et réduite ou standard.

Exercice 2.6.8 ($\star$ Variable centrée réduite)**.** Soit X d'espérance μ et de variance $\sigma^2 > 0$. Vérifier que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ vérifie $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$.

2.6.3 Loi Gamma

Définition 2.6.3. Une variable suit une loi Gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ (noté $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$) si

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \qquad x > 0.$$

Exercice 2.6.9. On sait que le resultat de l'integrale suivante est

Montrer que si $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alors

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Exercice 2.6.10 ($\star\star\star$ Attente du troisième appel)**.** On adopte la convention suivante : une variable X suit une loi Gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ si elle admet la densité

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

Un centre d'appels reçoit en moyenne 3 appels par heure selon un processus de Poisson. On note T_3 le temps d'attente avant le troisième appel.

1. Identifier la loi de T_3 et préciser ses paramètres.
2. Donner l'espérance et la variance de T_3.
3. Écrire la densité de T_3.
4. Exprimer $\mathbb{P}(T_3 \leq 1)$ à l'aide du nombre N_1 d'appels reçus durant la première heure.
5. Calculer cette probabilité.

2.6.4 Loi normale

Définition 2.6.4. Une variable aléatoire suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 (noté $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) si

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Exercice 2.6.11. Montrer en utilisant la définition de l'espérance et de la variance que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Exercice 2.6.12 ($\star\star$ Lecture de la table de la loi normale)**.** La résistance X (en ohms) d'un composant suit une loi $\mathcal{N}(50, 4^2)$. À l'aide de la table 3.1 (chapitre 3), calculer :

$$P(X \leq 54), \qquad P(46 \leq X \leq 54), \qquad P(X > 58).$$

Exemple 2.6.1 (Moyenne et variance à l'aide de la fonction caractéristique)**.** Soit une variable aléatoire $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Sa fonction caractéristique est

$$\varphi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

En dérivant,

$$\varphi'_X(0) = i\mu, \implies E(X) = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = \mu.$$

De plus,

$$\varphi''_X(0) = -\mu^2 - \sigma^2. \implies E(X^2) = -\varphi''_X(0) = \mu^2 + \sigma^2.$$

Finalement,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

Exercice 2.6.13 ($\star$ Une probabilité normale)**.** Soit $X \sim \mathcal{N}(10, 4)$. Calculer

$$P(X \leq 12)$$

à l'aide de la variable centrée réduite.

Exercice 2.6.14 ($\star\star$ Tailles d'une population)**.** Les tailles, en centimètres, d'une population suivent une loi normale

$$X \sim \mathcal{N}(175,\, 8^2).$$

1. Donner l'espérance et l'écart-type de X.
2. Exprimer la variable centrée réduite associée à X.
3. Calculer
$$\mathbb{P}(167 \leq X \leq 183).$$
4. Calculer
$$\mathbb{P}(X > 190).$$
5. Déterminer la taille h telle que
$$\mathbb{P}(X \leq h) = 0{,}95.$$

Exercice 2.6.15 ($\star\star\star$ Somme de deux normales indépendantes)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2).$$

Donner la loi de $X + Y$.

2.7 Couples de variables aléatoires (séance 5)

Cette partie se consacre à essayer de donner une relation entre deux variables aleatoires comme est la covariance. Elle est definie par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Le probleme ici est que la variable aleatoire X et Y sont dans la meme esperance ce qui veut dire qu'elles habitent dans le meme espace de probabilité. C'est essentialement ce fait qui relie les variables aleatoires. On abordera ça avec un exemple.

2.7.1 Loi jointe

Définition 2.7.1 (Loi jointe)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. La *loi jointe* de (X,Y) décrit la manière dont les deux variables se répartissent simultanément. La loi jointe est caractérisée par la fonction de répartition jointe

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Cas discret. Si X et Y sont discrètes, leur loi jointe est donnée par la fonction

$$p_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x,\ Y = y),$$

pour tout (x,y) dans l'ensemble des valeurs possibles de (X,Y).

En particulier, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x,\ Y \leq y) = \sum_{a \leq x} \sum_{b \leq y} p_{X,Y}(a,b)$$

Elle vérifie

$$p_{X,Y}(x,y) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_x \sum_y p_{X,Y}(x,y) = 1.$$

Cas continu. Si (X,Y) admet une densité jointe, il existe une fonction $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mesurable,

$$\mathbb{P}\big((X,Y) \in A\big) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

En particulier, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x,\ Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

La densité vérifie

$$f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$$

Naturellement il y a un moyen de récupérer les lois de chaque variable, c.a.d. sans prendre en compte ce qui fait l'autre variable.

Définition 2.7.2. Les lois marginales sont les lois obtenus en lorsque l'on laisse libre l'autre variable aleatoire

Cas discret. Comme la loi est déterminée par la probabilité de chaque valeur on retrouve (probabilités totales)

$$P(X = x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y) \qquad \text{et} \qquad P(Y = y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$$

Cas continu. Dans le cas continu on décrit la loi marginal par les densités marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy \qquad \text{et} \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx.$$

Dans le cadre des variables aleatoires dans le même espace de probabilité on définit l'espérance comme

Définition 2.7.3. Soit X, Y variables aléatoires réelles et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $E(|h(X, Y)|) < +\infty$. L'*espérance* de X est définie par

$$E(h(X, Y)) = \int_\Omega h(X(\omega), Y(\omega))\, dP_{X,Y}(\omega).$$

Cas discret.

$$E(h(X, Y)) = \sum_x \sum_y h(x, y) p_{X,Y}(x, y).$$

Cas continu.

$$E(h(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x, y) f_{X,Y}(x, y)\, dxdy.$$

Définition 2.7.4. Les variables X et Y sont indépendantes lorsque

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

En particulier

Cas discret.

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y).$$

Cas continu.

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Exercice 2.7.1 ($\star\star$ Un couple discret)**.** La loi jointe d'un couple (X, Y) à valeurs dans $\{0, 1\}^2$ est donnée par

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0,1	0,3
$X = 1$	0,2	0,4

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

Exercice 2.7.2 (⋆⋆ Tirages sans remise)**.** Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire successivement deux boules, sans remise. On définit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule est rouge,} \\ 0 & \text{si la première boule est bleue,} \end{cases}$$

et

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si la seconde boule est rouge,} \\ 0 & \text{si la seconde boule est bleue.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer
$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X = Y).$$
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2.7.2 Covariance

Définition 2.7.5. La covariance entre X et Y est

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Lorsque $Y = X$, on a $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$.

Interprétation

— covariance positive : évolution commune ;
— covariance négative : évolution opposée ;
— covariance nulle : absence de liaison linéaire. Ceci ne veut pas dire indépendant.

Proposition 2.7.1 (Propriétés de la covariance)**.** *Soient X, Y et Z des variables aléatoires avec une variance bien définie, et soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. ***Symétrie :***
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X).$$
2. ***Covariance avec une constante :***
$$\mathrm{Cov}(X, c) = 0.$$
3. ***Linéarité :***
$$\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathrm{Cov}(X, Z) + b\mathrm{Cov}(Y, Z),$$
et, de même,
$$\mathrm{Cov}(X, aY + bZ) = a\mathrm{Cov}(X, Y) + b\mathrm{Cov}(X, Z).$$
4. ***Changement affine :***
$$\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$
5. ***Variance :***
$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X) \geq 0.$$

6. ***Indépendance :*** *Si X et Y sont indépendantes, alors*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$

La réciproque est fausse en général.

7. ***Inégalité de Cauchy–Schwarz :***

$$\big|\mathrm{Cov}(X,Y)\big| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}.$$

La preuve de ces propriétés est laissé comme exercice et découle de la définition de l'espérance

Exercice 2.7.3 ($\star\star$ Variance d'une somme)**.** Démontrer que $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$ et que $\mathrm{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$ pour le couple de l'exercice 2.7.1.

Exercice 2.7.4 ($\star\star\star$ Covariance nulle sans indépendance)**.** Soit X uniforme sur $\{-1,0,1\}$ et $Y = X^2$. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, mais que X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 2.7.6. Le coefficient de corrélation linéaire est

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Il vérifie $-1 \leq \rho \leq 1$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2.7.5 ($\star\star$ Indépendance et covariance)**.** Montrer que deux variables indépendantes ont une covariance nulle.

Exercice 2.7.6 ($\star\star$ Covariance à partir d'un tableau)**.** Le couple (X,Y) admet la loi jointe suivante :

	$Y=0$	$Y=1$	$\mathbb{P}(X=x)$
$X=0$	0,10	0,10	0,20
$X=1$	0,20	0,20	0,40
$X=2$	0,10	0,30	0,40
$\mathbb{P}(Y=y)$	0,40	0,60	1

1. Vérifier que ce tableau définit bien une loi jointe.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
4. En déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
6. Interpréter le signe de la covariance.

Exercice 2.7.7 ($\star\star\star$ Droite de régression)**.** Déterminer la droite de régression associée aux données expérimentales suivantes :

$$(1,2),\ (2,3),\ (3,5),\ (4,7).$$

Indication : la droite des moindres carrés $y = ax + b$ a pour pente $a = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{v_x}$, où $\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$, et passe par le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$.

2.7.3 Loi conditionnelle

Définition 2.7.7. Soient X et Y deux variables aléatoires. On définit la loi conditionnelle comme suit

Cas discret. Pour tout y tel que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}.$$

où p_Y est la loi marginale de Y.

Cas continu. Pour tout y tel que $f_Y(y) > 0$, la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

où f_Y est la densité marginale de Y.

Exercice 2.7.8 ($\star$ Loi conditionnelle)**.** Pour le couple de l'exercice 2.7.1, donner la loi de X sachant $Y = 1$, puis $E(X \mid Y = 1)$.

Exercice 2.7.9 ($\star\star\star$ Un couple à densité)**.** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues de densité jointe

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2(x + y), & \text{si } (x, y) \in [0, 1]^2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{X,Y}$ est une densité de probabilité.
2. Déterminer les densités marginales f_X et f_Y.
3. Déterminer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$, pour $y \in [0, 1]$.
4. Calculer
$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{2}\right).$$
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2.7.4 Fonction caractéristique jointe

Définition 2.7.8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. La *fonction caractéristique jointe* du couple (X, Y) est la fonction définie, pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, par

$$\varphi_{X,Y}(s, t) = \mathbb{E}\left[\exp\big(\mathrm{i}(sX + tY)\big)\right].$$

Elle caractérise entièrement la loi jointe de (X, Y). De plus, les fonctions caractéristiques marginales s'obtiennent en prenant

$$\varphi_X(s) = \varphi_{X,Y}(s, 0), \qquad \varphi_Y(t) = \varphi_{X,Y}(0, t).$$

Exercice 2.7.10. Montrer que $\varphi_{X,Y}(s, t) = \varphi_X(s)\varphi_Y(t)$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.

“‘latex

Exemple 2.7.1 (Variables aleatoires discrètes dépendantes)**.** On lance deux fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de Pile obtenus au premier lancer, et Y le nombre total de Pile obtenus lors des deux lancers :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si le premier lancer donne Pile,} \\ 0 & \text{si le premier lancer donne Face,} \end{cases} \qquad Y = X + Z,$$

où Z vaut 1 si le second lancer donne Pile et 0 sinon.

Ainsi, les issues possibles et les valeurs associées sont :

Issue	X	Y
(F,F)	0	0
(F,P)	0	1
(P,F)	1	1
(P,P)	1	2

La loi jointe de (X,Y) est donnée par :

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$\mathbb{P}(X=x)$
$X=0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$X=1$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Par exemple,

$$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = 0, \qquad \mathbb{P}(X=1, Y=2) = \frac{1}{4}.$$

Calcul de la loi conditionnelle : Conditionnellement à l'événement $\{Y=0\}$, on sait nécessairement que les deux lancers ont donné Face. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X=0 \mid Y=0) = 1, \qquad \mathbb{P}(X=1 \mid Y=0) = 0.$$

Or,

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0),$$

ce qui montre que X et Y ne sont pas indépendantes.

On peut également calculer, pour $Y=1$,

$$\mathbb{P}(X=0 \mid Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=0, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

Calcul de la fonction caractéristique jointe : pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_{X,Y}(s,t) = \mathbb{E}\left[\exp\big(\mathrm{i}(sX+tY)\big)\right].$$

En utilisant la loi jointe, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_{X,Y}(s,t) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s+t)} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s+2t)} \\ &= \frac{1}{4}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s+t)}\right).\end{aligned}$$

Les fonctions caractéristiques marginales (calcules avec les lois marginales) sont

$$\varphi_X(s) = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\right),$$

et

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} = \frac{1}{4}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^2.$$

En général,

$$\varphi_{X,Y}(s,t) \neq \varphi_X(s)\varphi_Y(t).$$

Cela confirme que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exemple 2.7.2 (Deux variables aléatoires continues non indépendantes)**.** Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant la densité jointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le support de la densité est le triangle

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in [0,1]^2 : \ x \leq y\}.$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une densité :

$$\int_0^1 \int_x^1 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2(1-x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Calcul densités marginales : pour $x \in [0,1]$,

$$f_X(x) = \int_x^1 f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_x^1 2\,\mathrm{d}y = 2(1-x).$$

Ainsi,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, pour $y \in [0,1]$,

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^y 2\,\mathrm{d}x = 2y,$$

donc

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calcul densité conditionnelle : pour $y \in]0,1]$, la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ vaut

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 0 \leq x \leq y, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, sachant $Y = y$, la variable X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, y]$.

Par exemple, si $Y = \frac{1}{2}$, alors

$$f_{X|Y=1/2}(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elles ne sont pas independantes ! si X et Y étaient indépendantes, on aurait

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Or, pour $0 \leq x \leq y \leq 1$,

$$f_X(x) f_Y(y) = 4y(1-x) \neq 2 = f_{X,Y}(x,y).$$

Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Calcul fonction caractéristique jointe : pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_{X,Y}(s,t) = \mathbb{E}\left[\exp\big(\mathrm{i}(sX+tY)\big)\right] = 2\int_0^1 \int_x^1 \exp\big(\mathrm{i}(sx+ty)\big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque $s \neq 0$, $t \neq 0$ et $s + t \neq 0$, on obtient

$$\varphi_{X,Y}(s,t) = \frac{2}{\mathrm{i}t}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s+t)}-1}{\mathrm{i}(s+t)} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}-1}{\mathrm{i}s}\right].$$

Exercice 2.7.11 (⋆⋆ Fonction caractéristique jointe de $(X, 1-X)$)**.** Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. On définit

$$Y = 1 - X.$$

1. Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).
2. Calculer les fonctions caractéristiques marginales φ_X et φ_Y.
3. Montrer que la fonction caractéristique jointe est
$$\varphi_{X,Y}(s,t) = p\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} + (1-p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Comparer $\varphi_{X,Y}(s,t)$ et $\varphi_X(s)\varphi_Y(t)$.

Exercice 2.7.12 (⋆⋆ Somme de deux Bernoulli indépendantes)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Rappeler la fonction caractéristique de X.
2. Montrer que
$$\varphi_{X,Y}(s,t) = \mathbb{E}\left[\exp\big(\mathrm{i}(sX+tY)\big)\right] = \varphi_X(s)\varphi_Y(t).$$
3. En déduire que
$$\varphi_{X,Y}(s,t) = \left(1-p+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\right)\left(1-p+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right).$$
4. Calculer la fonction caractéristique de $X + Y$.
5. Retrouver ainsi la loi de $X + Y$.

2.8 Inégalités et théorèmes limites (séance 6)

Les théorèmes limites constituent l'un des fondements de la statistique et de l'ingénierie des données, on les utilisera pour la partie statistique

Définition 2.8.1 (Convergence en probabilité)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On dit que X_n converge vers X *en probabilité*, et on note

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X,$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) = 0.$$

Interprétation. Pour n suffisamment grand, la probabilité que X_n soit éloignée de X de plus de ε devient arbitrairement petite. À noter que ici on pose une question a l'intérieur de la probabilité qui concerne X_n et X, ce qui veut dire qu'elles habitent dans le même espace de probabilité.

Définition 2.8.2 (Convergence presque sûre)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On dit que X_n converge vers X *presque sûrement*, et on note

$$X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X,$$

si

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Interprétation. Pour presque toute issue ω, la suite réelle $\big(X_n(\omega)\big)_{n\geq 1}$ converge vers $X(\omega)$. Les éventuelles exceptions sont contenues dans un événement de probabilité nulle.

Définition 2.8.3 (Convergence en loi)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On dit que X_n converge vers X *en loi*, et on note

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X,$$

si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ auquel la fonction de répartition F_X est continue,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Interprétation. Les lois de X_n se rapprochent de la loi de X. Cette convergence ne compare pas nécessairement $X_n(\omega)$ et $X(\omega)$ issue par issue : elle porte uniquement sur leur distribution.

Proposition 2.8.1 (Liens entre les convergences)**.** *On a les implications*

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Les réciproques sont fausses en général.

2.8.1 Inégalité de Markov

Théorème 2.8.1. *Pour toute variable aléatoire positive et $a > 0$ on a*

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

2.8.2 Inégalité de Tchebychev

Théorème 2.8.2. *Pour toute variable aléatoire de variance finie et $a > 0$*

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Interprétation La probabilité de s'éloigner fortement de la moyenne est contrôlée par la variance.

Exercice 2.8.1 ($\star$ Utiliser Markov et Tchebychev)**.**

1. La durée de vie moyenne d'un composant est de 1 000 heures. Majorer la probabilité qu'il dure au moins 5 000 heures.
2. Une tension X a pour moyenne 50 V et pour écart-type 4 V. Majorer $P(|X - 50| \geq 10)$. Comparer avec la valeur obtenue si $X \sim \mathcal{N}(50, 16)$.

Exercice 2.8.2 ($\star\star\star$ Démonstrations)**.** Démontrer l'inégalité de Markov en remarquant que $a\,\mathbb{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$, puis en déduire l'inégalité de Tchebychev.

Exercice 2.8.3 ($\star$ Tchebychev à 3σ)**.** Appliquer l'inégalité de Tchebychev pour majorer

$$P(|X - E(X)| \geq 3\sigma).$$

Exercice 2.8.4 ($\star$ Sinistres d'assurance)**.** Soit X une variable aléatoire positive représentant le montant, en euros, d'un sinistre d'assurance. On suppose que

$$\mathbb{E}(X) = 1\,200.$$

1. Rappeler l'inégalité de Markov.
2. Majorer la probabilité qu'un sinistre coûte au moins 5 000 euros.
3. Majorer la probabilité qu'un sinistre coûte au moins 20 000 euros.
4. Quelle information supplémentaire sur X permettrait d'obtenir une majoration potentiellement plus précise ?

Exercice 2.8.5 ($\star\star$ Paquets de céréales)**.** La masse d'un paquet de céréales est modélisée par une variable aléatoire X telle que

$$\mathbb{E}(X) = 500 \text{ g}, \qquad \mathrm{Var}(X) = 25 \text{ g}^2.$$

1. Rappeler l'inégalité de Tchebychev.
2. Majorer la probabilité qu'un paquet s'écarte de plus de 10 g de la masse moyenne.
3. Déterminer une valeur $a > 0$ telle que

$$\mathbb{P}\big(|X - 500| \geq a\big) \leq 0{,}05.$$

4. Comparer cette borne avec une éventuelle probabilité exacte si X suivait une loi normale.

2.8.3 Loi des grands nombres

Théorème 2.8.3. *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de même loi, d'espérance μ. Alors*

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mu.$$

Autrement dit, sauf un ensemble de réalisations négligeable A on a

$$\overline{X}_n(\omega) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mu \qquad \forall \omega \in \Omega \setminus A$$

Autrement dit, la moyenne empirique converge vers la moyenne théorique.

Exercice 2.8.6 ($\star\star$ Combien de lancers ?)**.** On lance n fois une pièce équilibrée et on note $\overline{X}_n$ la proportion de Pile. Justifier que $\overline{X}_n \to \frac{1}{2}$. À l'aide de Tchebychev, trouver n tel que $P\big(|\overline{X}_n - \frac{1}{2}| \geq 0{,}05\big) \leq 0{,}05$.

2.8.4 Théorème central limite

Théorème 2.8.4. *Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance μ et de variance σ^2. Alors*

$$Z_n := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1);$$

c.a.d pour tout intervalle $A \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \in A) = P(\mathcal{N}(0,1) \in A).$$

Conséquence Pour n suffisamment grand, on a l'approximation suivante

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

Exercice 2.8.7 ($\star\star$ Résistances en série)**.** On monte en série 100 résistances indépendantes, de valeur moyenne $10\,\Omega$ et d'écart-type $0{,}5\,\Omega$. Donner une valeur approchée de la probabilité que la résistance totale dépasse $1\,010\,\Omega$.

Exercice 2.8.8 ($\star\star$ Approximation normale d'une binomiale)**.** On lance 400 fois une pièce équilibrée et on note S le nombre de Pile. Donner une valeur approchée de $P(S \geq 220)$.

Chapitre 3

Statistiques (6h)

La statistique regroupe les méthodes permettant de décrire, d'analyser et d'interpréter des données expérimentales.

Organisation du chapitre

Le chapitre est organisé en trois séances de 2 h de cours-TD intégré.

Séance	Contenu	Remarques
1	Population et variables ; effectifs et fréquences ; regroupement en classes ; représentations graphiques	
2	Paramètres de position et de dispersion ; valeurs atypiques ; méthode de synthèse	
3	Estimateurs, biais, variance ; intervalles de confiance par Tchebychev et par le TCL	s'appuie sur la séance 6 du chapitre 2

3.1 Statistique descriptive (séance 1)

3.1.1 Population, individus et variables

Définition 3.1.1 (Vocabulaire)**.** La *population* est l'ensemble des unités étudiées. Un *individu* est un élément de cette population. Pour chaque individu, on mesure une (ou plusieurs) *variable statistique* qui est une caractéristique observée sur chaque individu. Un *échantillon* est une partie observée de la population.

Définition 3.1.2 (Nature d'une variable)**.** Une variable est dite *quantitative* si elle prend des valeurs numériques. Elle est *discrète* lorsque ses valeurs sont isolées (nombre d'enfants) et *continue* lorsqu'elle peut prendre toute valeur d'un intervalle (taille, durée, masse).

Une variable est dite *qualitative* si elle décrit une catégorie. Elle est *nominale* s'il n'existe pas d'ordre naturel (filière, groupe sanguin) et *ordinale* dans le cas contraire (mention, satisfaction).

Attention. Un code numérique, tel qu'un code postal ou un numéro d'étudiant, reste une variable qualitative nominale.

Exercice 3.1.1 (⋆ Nature des variables)**.** Préciser la nature des variables : groupe sanguin, nombre de livres empruntés, mention au baccalauréat, température à midi, code postal.

3.1.2 Effectifs et fréquences

Les modalités d'une variable sont les valeurs possibles d'une variable. On va supposer que le nombre des modalités est finie (pour faire de la statistique) et on verra dans la section qui suit comment on gère les variables quantitatives continues.

Si les modalités sont $x_1, \dots, x_k$, l'*effectif* n_i est le nombre d'individus ayant la modalité x_i. L'effectif total vaut

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

La *fréquence* de x_i est

$$f_i = \frac{n_i}{n}, \qquad \sum_{i=1}^{k} f_i = 1.$$

Pour une variable ordonnée, les effectifs et fréquences cumulés croissants sont

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j, \qquad F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j = \frac{N_i}{n}.$$

Ils donnent respectivement le nombre et la proportion d'observations inférieures ou égales à x_i.

Exemple 3.1.1 (Temps de trajet)**.** Les temps de trajet (en minutes) de 20 étudiants sont résumés par :

x_i	10	15	20	25	30	Total
n_i	2	5	7	4	2	20
f_i	0,10	0,25	0,35	0,20	0,10	1
N_i	2	7	14	18	20	
F_i	0,10	0,35	0,70	0,90	1	

Ainsi, 70 % des étudiants ont un temps de trajet inférieur ou égal à 20 minutes.

Exercice 3.1.2 (⋆ Tableau de fréquences)**.** On a relevé pendant 30 jours le nombre de pannes quotidiennes d'une machine : 0 panne (8 jours), 1 panne (12 jours), 2 pannes (6 jours), 3 pannes (3 jours), 4 pannes (1 jour). Construire le tableau des fréquences et des effectifs et fréquences cumulés. Quelle proportion de jours compte au plus une panne ?

3.1.3 Regroupement des données

Pour une variable continue, ou ayant de nombreuses valeurs, on utilise des *classes*, par exemple $[10, 20[$. Elles doivent être disjointes et couvrir toutes les observations. La convention « borne gauche incluse, borne droite exclue » évite les chevauchements.

Définition 3.1.3 (Centre et densité)**.** Pour une classe $[a_i, b_i[$, son amplitude est $h_i = b_i - a_i$ et son centre est $c_i = (a_i + b_i)/2$. Si les classes n'ont pas la même amplitude, on définit la

densité de fréquence

$$d_i = \frac{f_i}{h_i}.$$

Dans un histogramme, l'aire du rectangle vaut alors $h_i d_i = f_i$.

Choix des classes. Les bornes doivent être lisibles. Entre 5 et 15 classes convient souvent : trop peu masque la distribution, trop de classes la rend difficile à lire.

Exercice 3.1.3 (⋆⋆ Classes d'amplitudes inégales)**.** Les durées d'appel (en minutes) de 80 clients sont regroupées ainsi : $[0, 5[$: 10 ; $[5, 10[$: 20 ; $[10, 20[$: 30 ; $[20, 40[$: 20. Calculer les fréquences et les densités de fréquence. Quelle est la classe modale ?

Exercice 3.1.4 (⋆ Hauteurs d'un histogramme)**.** Pour le tableau suivant, calculer les hauteurs de l'histogramme de fréquences et déterminer la classe modale :

Durée (min)	$[0, 10[$	$[10, 20[$	$[20, 40[$	$[40, 60]$
Effectif	12	24	28	16

3.1.4 Représentations graphiques

Un graphique doit avoir un titre, des axes légendés, une unité et une échelle non trompeuse.

Type de variable	Représentation adaptée
Qualitative nominale	Diagramme en barres ; circulaire si très peu de modalités.
Qualitative ordinale	Diagramme en barres en respectant l'ordre.
Quantitative discrète	Diagramme en bâtons ; boîte à moustaches.
Quantitative continue	Histogramme ; boîte à moustaches.

On accompagne les contenus avec des images prises directement du polycopié d'Adrien Richou pour le cours de statistique descriptive L3.

Variables qualitatives. Le diagramme en barres possède des barres *séparées* par modalité. Le diagramme circulaire attribue à la modalité i un angle de $360 f_i$ degrés ; il est peu adapté lorsque les catégories sont nombreuses ou proches en fréquence.

Variables quantitatives. Le diagramme en bâtons est utilisé pour les valeurs discrètes. Dans un histogramme, les rectangles sont accolés. Si les amplitudes sont inégales, c'est l'**aire**, et non la hauteur, qui représente la fréquence. Une boîte à moustaches résume minimum, premier quantile Q_1, médiane, troisième quantile Q_3 et maximum (voir la suite pour la définition de quantile).

Exercice 3.1.5 (⋆ Choisir une représentation)**.** Quelle représentation choisir pour : le mode de transport des étudiants ; le nombre de frères et sœurs ; la durée de vie de 200 ampoules ; le niveau de satisfaction (« pas du tout » à « très satisfait ») ?

3.2 Analyse descriptive univariée (séance 2)

L'analyse univariée décrit une seule variable. Les paramètres de position indiquent où se situent les observations ; ceux de dispersion mesurent leur étalement.

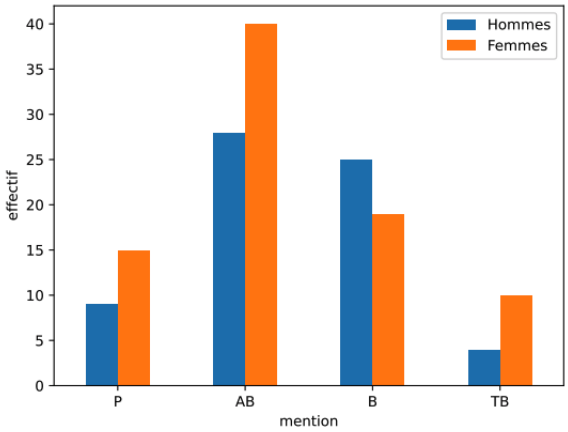


FIGURE 3.1 – Diagramme en barres : mention d'une population d'étudiants sépare par genre. Chaque modalité est placé dans l'abscisse et l'effectif dans l'ordonnée.

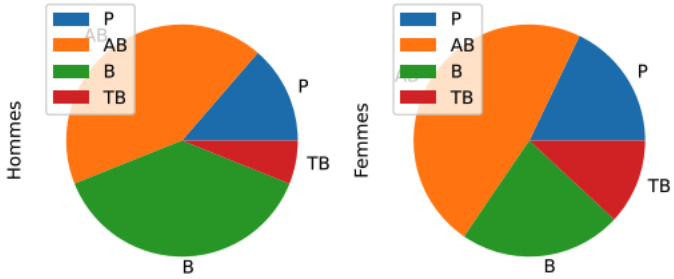


FIGURE 3.2 – Diagramme circulaire : les modalités sont représentées par un secteur angulaire d'un disque dont l'angle est proportionnel 'a l'effectif ou à la fréquence.

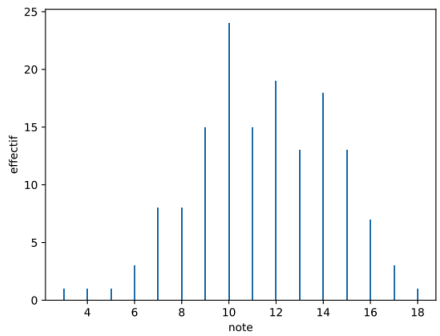


FIGURE 3.3 – Diagramme en bâtons notes des étudiant.e.s : Un bâton par valeur possible de la variable quantitative discrète et sur l'ordonnée l'effectif ou la fréquence.

3.2.1 Paramètres de position

Définition 3.2.1 (Mode)**.** Le *mode* est la modalité ou valeur d'effectif maximal. Une série peut avoir plusieurs modes ou ne pas avoir de mode unique.

Dans le tableau précédent, le mode est 20 minutes. Pour des classes d'amplitudes inégales,

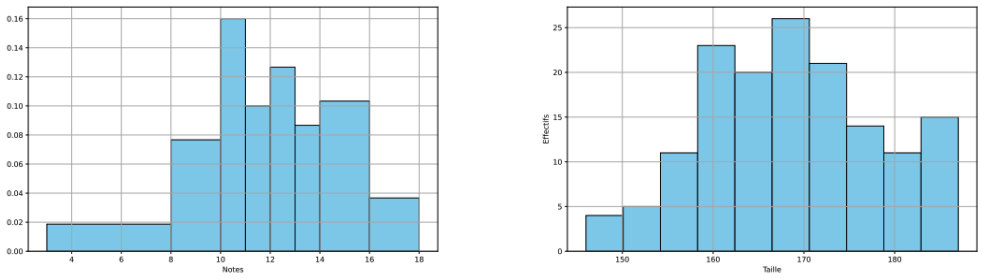


FIGURE 3.4 – Histogramme des notes et tailles par étudiant.e.s : un avec amplitudes différents et un avec amplitudes égales. L'aire représente la fréquence et non pas la hauteur.

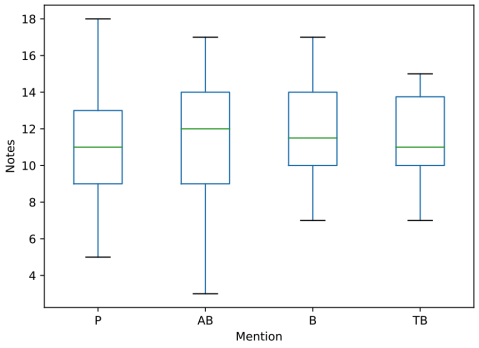


FIGURE 3.5 – Boîte à moustaches des notes par mention : la boite représente dans ces extrémités (verticales) la séparation du premier et troisième quartile ; la ligne verte montre la médiane.

on désigne comme classe modale celle qui a la plus grande *densité* de fréquence. Le mode est utilisable pour les variables qualitatives.

Définition 3.2.2 (Moyenne)**.** Pour n observations $x_1, \ldots, x_n$, la moyenne est définie

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Lorsque les valeurs distinctes x_i ont pour effectifs n_i et fréquences f_i,

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i.$$

Dans l'exemple (3.1.1),

$$\overline{x} = \frac{2\times 10 + 5\times 15 + 7\times 20 + 4\times 25 + 2\times 30}{20} = 19{,}75 \text{ minutes}.$$

Exercice 3.2.1. Montrer que pour des constantes a, b,

$$(\overline{x+a})_n = \overline{x}_n + a, \qquad (\overline{bx})_n = b\overline{x}_n, \qquad \sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x}_n) = 0.$$

Si des groupes de tailles n_g ont des moyennes $\overline{x}_g$, alors

$$\overline{x}_n = \frac{\sum_g n_g \overline{x}_g}{\sum_g n_g}.$$

Exercice 3.2.2 (⋆ Moyenne de deux groupes)**.** Un groupe de 12 étudiants a obtenu 11 de moyenne et un groupe de 18 étudiants a obtenu 13. Quelle est la moyenne de l'ensemble ? Pourquoi n'est-ce pas 12 ?

La moyenne utilise toutes les données, mais elle est sensible aux valeurs extrêmes.

Médiane, quartiles et quantiles

Après classement, on note $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$.

Définition 3.2.3 (Quantiles)**.** La *médiane* partage la série en deux parties contenant chacune au moins 50 % des observations. Un *quantile* d'ordre $p \in]0,1[$ est une valeur q_p telle qu'environ une proportion p des observations lui soit inférieure ou égale. Les quartiles sont

$$Q_1 = q_{0,25}, \qquad Q_2 = q_{0,50} = \text{Med}, \qquad Q_3 = q_{0,75}.$$

Une convention courante est de prendre pour q_p la plus petite valeur x_i telle que $F_i \geq p$. Ainsi, pour les temps de trajet,

$$Q_1 = 15, \qquad \text{Med} = 20, \qquad Q_3 = 25.$$

Pour des données groupées, le quantile se calcule approximativement par interpolation dans la classe contenant pn :

$$q_p \simeq L + h\frac{pn - N_{\text{avant}}}{n_c},$$

où L est la borne inférieure, h l'amplitude, N_{avant} l'effectif cumulé avant la classe et n_c son effectif. Cette formule suppose une répartition uniforme dans la classe.

Exercice 3.2.3 (⋆⋆ Médiane, quartiles et valeur extrême)**.** Pour la série $1, 3, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 20$, calculer la moyenne, la médiane et les quartiles (avec la convention du cours). Que se passe-t-il si l'on remplace 20 par 200 ?

Exercice 3.2.4 (⋆⋆ Quantile de données groupées)**.** Avec les classes de l'exercice 3.1.3, estimer la médiane par interpolation linéaire.

Exercice 3.2.5 (⋆ Médiane ou moyenne ?)**.** Expliquer pourquoi la médiane est souvent préférable à la moyenne pour décrire les revenus annuels.

3.2.2 Paramètres de dispersion

Définition 3.2.4. L'*étendue* et l'*écart interquartile* sont

$$E = x_{\max} - x_{\min}, \qquad IQR = Q_3 - Q_1.$$

L'étendue dépend seulement de deux valeurs et est sensible aux extrêmes. L'écart interquartile mesure la dispersion des 50 % d'observations centrales ; il est plus robuste. Pour les trajets : $E = 20$ et $IQR = 10$ minutes.

Définition 3.2.5. La variance et écart-type descriptifs ou d'un échantillon est

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2, \qquad \sigma_n = \sqrt{V}.$$

Avec des effectifs,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \overline{x}^{\,2}.$$

Dans l'exemple (3.1.1), $v_{20} = 425 - 19{,}75^2 = 34{,}9375$ et $\sigma_{20} \simeq 5{,}91$ minutes. L'écart-type est exprimé dans l'unité de la variable, contrairement à la variance.

Pour une variable positive,

$$CV_n = \frac{\sigma_n}{\overline{x}_n}$$

compare des dispersions relatives. Il n'est pas pertinent lorsque la moyenne est nulle ou presque nulle. Dans une boîte à moustaches, une convention courante signale comme atypique toute valeur extérieure à

$$[Q_1 - 1{,}5IQR,\ Q_3 + 1{,}5IQR].$$

Cette intervalle est celui délimite par les autres barres de la boîte à moustache 3.1.4. S'il y a des valeurs à l'extérieur de cette intervalle, ils sont représentes par des points.

Une valeur atypique doit être contrôlée et interprétée, pas automatiquement supprimée.

Exercice 3.2.6 (⋆⋆ Variance d'une série)**.** Pour les données de pannes de l'exercice 3.1.2, calculer la moyenne, la variance et l'écart-type.

Exercice 3.2.7 (⋆⋆ Valeurs atypiques et changement d'unité)**.**

1. Pour la série de l'exercice 3.2.3, déterminer l'intervalle $[Q_1 - 1{,}5IQR\,;\, Q_3 + 1{,}5IQR]$. Y a-t-il des valeurs atypiques ?
2. Des températures ont une moyenne de 20 °C et un écart-type de 3 °C. Donner la moyenne et l'écart-type en degrés Fahrenheit ($F = 1{,}8\,C + 32$).

Exercice 3.2.8 (⋆⋆ Une série de notes)**.** Pour les notes

$$8, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 18,$$

construire le tableau de fréquences puis calculer mode, moyenne, médiane, quartiles, étendue et écart interquartile.

Méthode de synthèse

1. Identifier la population, la variable et sa nature.
2. Construire un tableau d'effectifs et de fréquences, éventuellement cumulées.
3. Choisir une représentation cohérente avec la variable.
4. Donner au moins un indicateur de position et un de dispersion.
5. Commenter centre, étalement, asymétrie éventuelle et valeurs atypiques.

3.3 Introduction à l'estimation (séance 3)

L'estimation appartient à la statistique inférentielle : à partir d'un échantillon, elle vise à obtenir une information sur un paramètre inconnu de la population, par exemple une moyenne μ, une proportion p ou une variance σ^2. Dans cette section, on suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont des observations indépendantes, de même loi, issues de la population étudiée.

3.3.1 Estimateurs

Définition 3.3.1 (Estimateur et estimation)**.** Un *estimateur* d'un paramètre θ est une variable aléatoire $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ calculée à partir de l'échantillon (il ne dépend pas du paramètre à estimer). Sa valeur observée t_n est une *estimation* de θ.

Interprétation. Avant d'observer les données, T_n varie d'un échantillon à l'autre : c'est une variable aléatoire. Une fois l'échantillon observé, son résultat est un nombre, l'estimation ponctuelle du paramètre.

Exemple 3.3.1 (Estimateurs usuels)**.** Pour estimer une moyenne μ, on utilise la moyenne empirique

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Considerons $Y_i = \mathbf{1}_{\{\text{La personne } i \text{ possède la caractéristique}\}}$ (v.a. de Bernoulli), alors une estimation du parametre qui est la moyenne est

$$\widehat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Si 58 personnes sur 100 se déclarent satisfaites, l'estimation ponctuelle de p est $\widehat{p}_{100} = 0{,}58$.

3.3.2 Biais et variance d'un estimateur

Définition 3.3.2 (Biais)**.** Le *biais* d'un estimateur T_n de θ est

$$\text{Biais}(T_n) = \mathbb{E}(T_n) - \theta.$$

L'estimateur est dit *sans biais* lorsque $\text{Biais}(T_n) = 0$, qui veut dire $\mathbb{E}(T_n) = \theta$.

Interprétation. Le biais mesure l'erreur systématique moyenne produite par la méthode lorsque l'on répète l'échantillonnage. Un estimateur sans biais n'est pas nécessairement précis sur un échantillon particulier.

Exercice 3.3.1 (Variance d'un estimateur)**.** La *variance* de l'estimateur T_n est

$$\text{Var}(T_n) = \mathbb{E}\left[(T_n - \mathbb{E}(T_n))^2\right].$$

Elle mesure la variabilité de l'estimateur d'un échantillon à l'autre.

Pour comparer globalement deux estimateurs, on peut aussi considérer l'erreur quadratique moyenne :

$$\text{EQM}(T_n) = \mathbb{E}\left[(T_n - \theta)^2\right] = \text{Var}(T_n) + \text{Biais}(T_n)^2.$$

Un bon estimateur présente donc un biais faible et une faible variance.

Exemple 3.3.2 (Un thermomètre décalé : estimateur, biais et variance)**.** On souhaite estimer la température réelle θ d'une pièce. On effectue n mesures indépendantes avec un thermomètre. La i-ième mesure est modélisée par

$$X_i = \theta + 2 + \varepsilon_i,$$

où ε_i représente une erreur de mesure aléatoire telle que

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0, \qquad \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2.$$

Le terme $+2$ signifie que le thermomètre affiche, en moyenne, deux degrés de trop.

On considère l'estimateur naturel de θ :

$$T_n = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Calcul du biais : comme

$$\mathbb{E}(X_i) = \theta + 2,$$

on a

$$\mathbb{E}(T_n) = \theta + 2.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Biais}(T_n) = \mathbb{E}(T_n) - \theta = 2.$$

L'estimateur T_n est donc biaisé car en moyenne, il surestime la température réelle de $2\,^\circ$C.

Calcul de la variance : les mesures étant indépendantes,

$$\mathrm{Var}(T_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Lorsque n augmente, la variance diminue : les estimations deviennent moins dispersées d'un échantillon à l'autre.

Correction du biais : puisque le décalage du thermomètre est connu, on peut définir

$$\widetilde{T}_n = \overline{X}_n - 2.$$

Alors,

$$\mathbb{E}(\widetilde{T}_n) = \mathbb{E}(\overline{X}_n) - 2 = \theta.$$

L'estimateur $\widetilde{T}_n$ est sans biais. De plus, il garde la même variance

$$\mathrm{Var}(\widetilde{T}_n) = \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Take home message : augmenter le nombre de mesures réduit la variance, mais ne corrige pas un biais systématique. Ici, même avec beaucoup de mesures, $\overline{X}_n$ reste en moyenne trop grand de $2\,^\circ$C.

Exercice 3.3.2 (Moyenne empirique)**.** Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, de même espérance μ et de variance σ^2, alors

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

La moyenne empirique est donc sans biais pour μ et sa précision augmente avec la taille n de l'échantillon.

Exercice 3.3.3 ($\star\star$ Estimer la borne d'une loi uniforme)**.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de loi $\mathcal{U}([0, \theta])$, avec $\theta > 0$ inconnu. On pose $T_n = 2\overline{X}_n$. Montrer que T_n est un estimateur sans biais de θ et calculer sa variance.

Exercice 3.3.4 ($\star\star\star$ La variance empirique est biaisée)**.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, d'espérance μ et de variance σ^2, et $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2$.
2. En déduire $\mathbb{E}(V_n) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$. Proposer un estimateur sans biais de σ^2.

Exercice 3.3.5 ($\star$ Biais et variance de deux estimateurs)**.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même espérance μ et de même variance σ^2. On considère les estimateurs suivants de μ :

$$T_n = \overline{X}_n, \qquad U_n = \overline{X}_n + 3.$$

1. Calculer le biais de T_n et celui de U_n.
2. Calculer la variance de T_n et celle de U_n.
3. Lequel de ces deux estimateurs est sans biais ?
4. Expliquer pourquoi augmenter n diminue la variance, mais ne supprime pas le biais de U_n.

Exercice 3.3.6 ($\star\star$ Estimer une proportion)**.** On observe un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

On souhaite estimer la proportion inconnue p. On considère les deux estimateurs

$$T_1 = X_1 \qquad \text{et} \qquad T_2 = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

1. Expliquer pourquoi T_1 et T_2 sont des estimateurs de p.
2. Calculer $\mathbb{E}(T_1)$ et $\mathbb{E}(T_2)$.
3. Calculer $\mathrm{Var}(T_1)$ et $\mathrm{Var}(T_2)$.
4. Lequel des deux estimateurs semble le plus précis lorsque $n > 1$? Justifier.

3.3.3 Estimation ponctuelle

Une *estimation ponctuelle* fournit une unique valeur plausible du paramètre. Elle est simple à communiquer, mais ne renseigne pas à elle seule sur l'incertitude liée à l'échantillonnage.

Exemple 3.3.3. Sur un échantillon de 64 ampoules, la durée de vie moyenne observée est 1 020 heures. L'estimation ponctuelle de la durée de vie moyenne de la production est $\overline{x} = 1\,020$ heures. Une autre sélection de 64 ampoules aurait généralement conduit à une valeur légèrement différente.

Exercice 3.3.7 ($\star$ Durées de trajet)**.** Les durées de trajet, en minutes, d'un échantillon de 12 étudiants sont :

$$18,\ 22,\ 25,\ 20,\ 27,\ 19,\ 24,\ 21,\ 23,\ 26,\ 20,\ 25.$$

On souhaite estimer la durée moyenne μ des trajets de l'ensemble des étudiants.

1. Calculer l'estimation ponctuelle $\overline{x}_n$ de μ.
2. Calculer la variance empirique
$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$
3. Calculer l'écart-type empirique correspondant.
4. Expliquer pourquoi cette estimation ponctuelle ne permet pas, à elle seule, de mesurer l'incertitude sur μ.

3.4 Intervalles de confiance pour la moyenne

Définition 3.4.1 (Estimation par intervalle)**.** Une *estimation par intervalle* d'un paramètre θ consiste à fournir deux statistiques L_n et U_n et l'intervalle aléatoire $[L_n, U_n]$, susceptible de contenir θ.

Définition 3.4.2 (Intervalle de confiance)**.** Un intervalle aléatoire $[L_n, U_n]$ est un *intervalle de confiance* (IC) de niveau $1-\alpha$ pour θ si

$$P\big(L_n \leq \theta \leq U_n\big) = P\big(\theta \in [L_n, U_n]\big) \geq 1-\alpha,$$

pour L_n et U_n estimateurs.

Après observation de l'échantillon, l'intervalle obtenu est appelé *intervalle de confiance observé*. On appelle $[U_n, L_n]$ un *intervalle de confiance asymptotique* (ICA) si

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\theta \in [L_n, U_n]\big) \geq 1-\alpha,$$

Interprétation correcte. Dans une répétition hypothétique de l'expérience, la méthode de construction fournit des intervalles contenant le vrai paramètre dans une proportion $1-\alpha$ des cas. Une fois les données observées, le paramètre est fixe : on ne dit donc pas, au sens fréquentiste strict, qu'il a une probabilité $1-\alpha$ d'être dans l'intervalle observé.

En fonction de si l'on construit un IC où un ICA on doit utiliser différentes techniques.

3.4.1 Utilisation d'inégalités

Supposons que l'on veuille estimer $m = E[X]$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev donne que pour $\varepsilon > 0$,

$$P(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2}\ .$$

Ceci peut s'écrire comme

$$P(m \in [\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

Si l'on peut trouver $\varepsilon(\alpha)$ (en fonction de α), ceci fournira un intervalle de confiance $[\overline{X}_n - \varepsilon(\alpha), \overline{X}_n + \varepsilon(\alpha)]$.

Lorsqu'on connait la variance on peut égaler le coté droit avec $1-\alpha$ ce qui donne l'équation

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= 1 - \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \\ \iff \alpha &= \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \\ \iff \varepsilon &= \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\alpha}} \end{aligned}$$

D'où on obtient un intervalle de confiance

$$\Big[\overline{X}_n - \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\alpha}}, \overline{X}_n + \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\alpha}}\Big]$$

Il suffit alors juste de remplacer les valeurs en fonction du modèle pour obtenir un IC.

Des fois on ne connait pas la variance mais on peut s'en sortir pour construire un IC.

Exemple 3.4.1. Considérons le modèle Bernoulli $P_\theta = \mathcal{B}(\theta)$ avec $\theta \in]0,1[$.

Dans ce cas $\mathbb{E}_\theta[X_1] = \theta$ et $\mathrm{Var}_\theta(X_1) = \theta(1-\theta) \leqslant \frac{1}{4}$. On a donc

$$P_\theta\big(\theta \notin [\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon]\big) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2} \ .$$

d'où

$$P_\theta\big(\theta \in [\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon]\big) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \ .$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$, on obtient un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$.

Application numérique : Pour $\alpha = 1\%$ et $n = 100$, l'intervalle de confiance s'écrit $[\overline{X}_n - \frac{1}{2}, \overline{X}_n + \frac{1}{2}]$. Prenons plutôt $\alpha = 5\%$, alors $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 0.22$, d'où l'intervalle de confiance $[\overline{X}_n - 0.22, \overline{X}_n + 0.22]$ de niveau 0.95.

La technique que l'ont vient de voir sert pour n'importe quelle type de variable aléatoire et pour créer un IC.

Exercice 3.4.1 ($\star\star$ Sondage avec Tchebychev)**.** Dans un sondage auprès de $n = 400$ personnes, $\overline{x}_{400} = 0{,}54$ déclarent être satisfaites. Donner un intervalle de confiance de niveau 95 % pour la proportion p à l'aide de l'inégalité de Tchebychev.

Exercice 3.4.2 ($\star\star$ Intervalle de Tchebychev)**.** On observe un échantillon de taille $n = 64$ issu d'une population de moyenne inconnue μ et de variance connue

$$\sigma^2 = 16.$$

La moyenne observée est

$$\overline{x} = 50.$$

1. Rappeler l'inégalité de Tchebychev appliquée à la moyenne empirique $\overline{X}_n$.
2. Déterminer $a > 0$ tel que
$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \leq a\right) \geq 0{,}95.$$
3. En déduire un intervalle de confiance de niveau au moins 95 % pour μ.
4. Commenter la précision de cet intervalle.

3.4.2 Utilisation du Théorème Central Limite

Là encore on cherche à estimer $m = E[X_1]$. Le théorème central limite donne que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \right| > t \right) = P(|Z| > t)$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Mais alors, par symétrie de la distribution normale

$$P(|Z| > t) = P(Z > t) + P(-Z > t) = 2P(Z > t) \ .$$

En prenant $t = F_Z^-(1 - \frac{\alpha}{2})$ (ceci peut se faire à l'aide d'un tableau ou des commandes en python par exemple, car la distribution normale est continue et la fonction de répartition F_Z est bijective), on a donc

$$P(Z > t) = 1 - P(Z \leqslant t) \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

d'où $P(|Z| > t) \leqslant \alpha$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(m \in \left[\overline{X}_n - t\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + t\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}} \right] \right) \geq 1 - \alpha \ .$$

D'où on obtient un ICA quand la variance est connue de la forme

$$\left[\overline{X}_n - t\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + t\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}} \right]$$

On peut suivre la même technique que pour la partie precedente lorsqu'on ne connait pas la variance.

Exemple 3.4.2. Dans le modèle Bernoulli $P_\theta = \mathcal{B}(\theta)$, on a $\sigma^2 = \theta(1-\theta) \leqslant \frac{1}{4}$. Donc

$$\left[\overline{X}_n - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \right] \subset \left[\overline{X}_n - \frac{t}{2\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{t}{2\sqrt{n}} \right] \ .$$

Par suite

$$\lim_{n\to\infty} P\left(m \notin \left[\overline{X}_n - \frac{t}{2\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{t}{2\sqrt{n}} \right] \right) \leqslant \alpha \ .$$

Application numérique : Pour $\alpha = 5\%$ et $n = 100$, $t = F_Z^-(0.975) \approx 1.96$ et donc $\frac{t}{2\sqrt{n}} \approx 0.098 \approx 0.1$. On obtient donc que $[\overline{X}_n - 0.1, \overline{X}_n + 0.1]$ est un ICA de niveau 0.95. On note comme conséquence que cet intervalle est plus ajusté que celui donné par l"inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

On note aussi que pour les IC et ICA obtenus on peut faire un analyse de l'intervalle par rapport a α et n, ce qui permet par exemple pour α donné de trouver n de sorte d'avoir un intervalle de largeur donné.

Cette technique sert pour donner un ICA pour tout type de variable aléatoire où le TCL s'applique (i.e. variance finie).

Il y a en particulier un cas où cet intervalle donne un IC et c'est pour le modèle $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, car $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$. On laisse comme exercice répéter les étapes pour retrouver le même IC (on va pouvoir enlever la limite) donne par le TCL.

Exercice 3.4.3 (⋆⋆ Sondage avec le TCL et taille d'échantillon)**.**

1. Reprendre le sondage précédent ($n = 400$, $\overline{x}_{400} = 0{,}54$) avec l'intervalle asymptotique issu du TCL, au niveau 95 %.
2. Quelle taille d'échantillon faut-il pour que la demi-largeur $\frac{t}{2\sqrt{n}}$ soit au plus 0,03 au niveau 95 % ?

Exercice 3.4.4 (⋆⋆ Durée de vie d'ampoules)**.** Sur 64 ampoules, la durée de vie moyenne observée est $\overline{x} = 1\,020$ heures ; on suppose l'écart-type connu, $\sigma = 80$ heures. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95 %, puis de niveau 99 %, pour la durée de vie moyenne.

Exercice 3.4.5 (⋆⋆ Durée de connexion)**.** On étudie la durée quotidienne de connexion à une application. Sur un échantillon de taille $n = 100$, on observe

$$\overline{x}_{100} = 12{,}4 \text{ minutes}, \qquad s^2_{100} = 9 \text{ minutes}^2.$$

On suppose que n est suffisamment grand pour utiliser le théorème central limite.

1. Construire un intervalle de confiance asymptotique pour la moyenne μ de niveau 95%.
2. Construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau 99 % en utilisant $z_{0{,}995} \simeq 2{,}576$.
3. Comparer les largeurs des deux intervalles.
4. Expliquer l'effet d'une augmentation de la taille n sur la largeur de l'intervalle.

Largeur d'un intervalle. La largeur diminue quand la taille d'échantillon augmente, car elle est en $1/\sqrt{n}$. Elle augmente lorsque le niveau de confiance demandé est plus élevé : obtenir davantage de confiance exige un intervalle plus large.

Remarque.

— En pratique, on pourra obtenir une approximation des quantiles de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ via la fonction `scipy.stats.norm.ppf` (*percent point function*) de Python, ou via la fonction `qnorm` de R.

— Il conviendra de retenir quelques valeurs

t	0.95	0.975	0.995	0.9995
$F_Z^-(t)$	1.645	1.96	2.57	3.30

Exemple 3.4.3 (Intervalles de confiance : Tchebychev et TCL)**.** On reprend le modèle du thermomètre décalé :

$$X_i = \theta + 2 + \varepsilon_i,$$

où les erreurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont indépendantes et vérifient

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0, \qquad \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 < \infty.$$

On utilise l'estimateur corrigé

$$\widetilde{T}_n = \overline{X}_n - 2.$$

Il est sans biais pour θ et

$$\mathrm{Var}(\widetilde{T}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Comparaison numérique. Supposons que $n = 100$, $\sigma = 5$ et que l'on souhaite un niveau de confiance de 95 %, soit $\alpha = 0{,}05$.

L'intervalle de Tchebychev a une demi-largeur égale à

$$\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\alpha}} = \frac{5}{\sqrt{100 \times 0{,}05}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \simeq 2{,}24.$$

Il est donc de la forme

$$[\widetilde{T}_n - 2{,}24\,;\, \widetilde{T}_n + 2{,}24].$$

L'intervalle asymptotique fondé sur le TCL utilise $t \simeq 1{,}96$ et possède une demi-largeur

$$t\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}} = 1{,}96\frac{5}{\sqrt{100}} = 0{,}98.$$

Il est donc de la forme

$$[\widetilde{T}_n - 0{,}98\,;\, \widetilde{T}_n + 0{,}98].$$

Conclusion. L'intervalle de Tchebychev est valable dès que la variance est finie, mais il est généralement très large. L'intervalle issu du théorème central limite est plus précis pour un grand échantillon, mais son niveau de confiance est asymptotique.

On finit cette section avec le tableau de la distribution normale.

Pour les valeurs négatives, on utilise la symétrie :

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

TABLE 3.1 – Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$, où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0,6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0,7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1,0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2,0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2,1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2,2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2,3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2,4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2,5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2,6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2,7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2,8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2,9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3,0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990